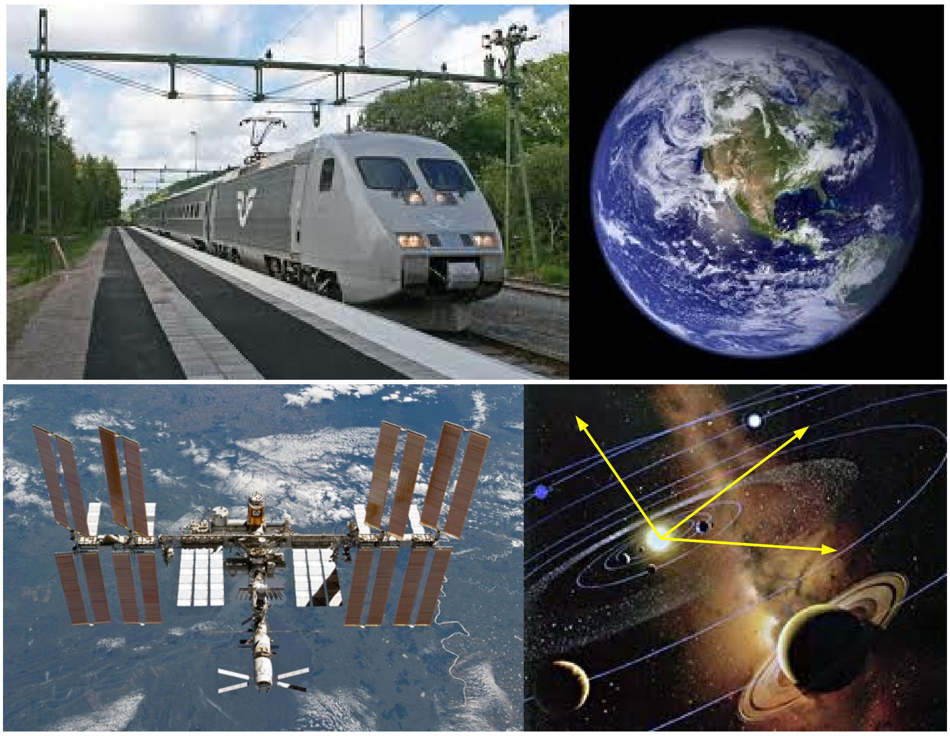
Föreläsningar i Mekanik (FMEA30)
Del1: Statik och partikeldynamik

Läsvecka 2

Föreläsning 1: Jämvikt, jämviktsvillkor, statiskt obestämda kraftsystem (3/1-3/3).

Jämvikt: Rörelse och **vila** hos materiella kroppar beskrivs alltid i förhållande till en **referensram**. Alla rörelse är **relativ** och måste beskrivas (mätas) i förhållande till något som vi betraktar som fixt, t ex ett system av kroppar vilkas inbördes lägen vi bedömer som oföränderliga, t ex golv, väggar och tak i en lokal, den fasta jordskopan ('terra firma'), en rymdstation, solen eller de så-kallade fixstjärnorna.



Figur 1.1 Referensramar.

Definition: En materiell kropp sägs vara i (mekanisk) **jämvikt** i förhållande till en given referensram om den befinner sig i **permanent vila**, d v s förblir orörlig i förhållande till den givna referensramen. Det system av yttre krafter och moment som verkar på kroppen i jämvikt sägs **hålla jämvikt** på kroppen. En kropp som är i jämvikt i förhållande till en given referensram sägs också vara i jämvikt i förhållande till varje annan referensram som har likformig translations-hastighet i förhållande till den primärt givna ramen.
Låt O vara en fix (orörlig) punkt i referensramen och $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ en i referensramen fix HON-bas. Om P är en materiell punkt i kroppen så beskrivs läget av punkten av **lägesvektorn**

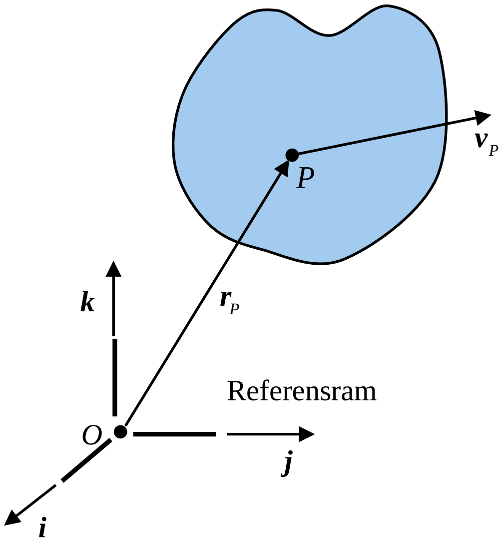
$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_P(t) = \boldsymbol{i}\,x_P(t) + \boldsymbol{j}\,y_P(t) + \boldsymbol{k}\,z_P(t) \tag{1.1}$$

där (x_P, y_P, z_P) är punktens koordinater och t betecknar **tidvariabeln**. Punktens P hastighet $\boldsymbol{v}_P$, relativt referensramen, definieras av

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_P(t) = \boldsymbol{i}\,\dot{x}_P(t) + \boldsymbol{j}\,\dot{y}_P(t) + \boldsymbol{k}\,\dot{z}_P(t) \tag{1.2}$$

där t ex $\dot{x}_P = \dot{x}_P(t)$ betecknar derivatan av koordinaten $x_P = x_P(t)$ med avseende på tiden, d v s

$$\dot{x}_P(t) = \frac{dx_P(t)}{dt}$$



Figur 1.2 Hastighet och referensram.

Vid jämvikt (relativt referensramen) gäller

$$\boldsymbol{v}_P(t) = \boldsymbol{u}, \quad \forall P \in \mathcal{B} \tag{1.3}$$

för alla tider t, där $\boldsymbol{u}$ är en konstant (tidsoberoende) vektor, t ex $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Jämviktsvillkor: Betrakta en kropp $\mathcal{B}$ som påverkas av ett system av **yttre punkkrafter och moment**

$$\mathcal{F}^y : \ (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{M}_1, P_1), \ (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{M}_2, P_2), \ldots, (\boldsymbol{F}_n, \boldsymbol{M}_n, P_n) \tag{1.4}$$

Låt $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{M}_O$ beteckna kraftsystemets kraftsumma och momentsumma, respektive, d v s

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\,, \ \ \boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{M}_i)$$

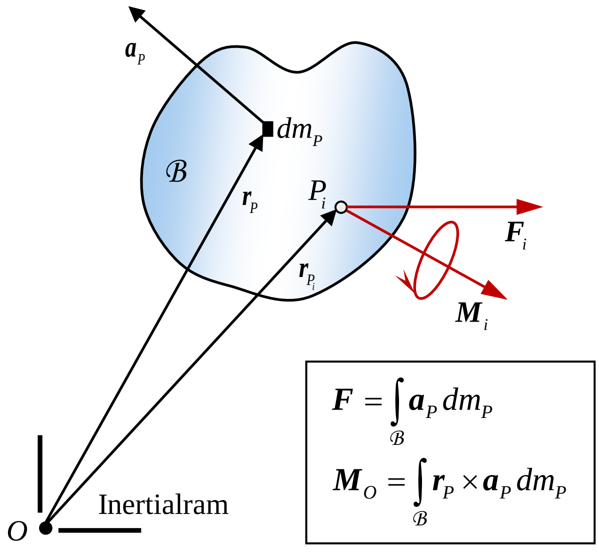
Momentpunkten O antas vara fix, ligga stilla, i förhållande till referensramen. Det finns nu en klass av referensramar, så kallade **inertialramar**, i vilka **mekanikens grundekvationer** i form av **Euler's rörelselagar** gäller (Leonard Euler 1707-1783). Dessa ges av ekvationerna

$$\boldsymbol{F} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{a}_P \, dm_P \,, \quad \boldsymbol{M}_O = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{a}_P \, dm_P \tag{1.5}$$

där $\boldsymbol{a}_P$ betecknar den materiella punktens P acceleration relativt inertialramen, d v s

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_P(t) = \boldsymbol{i}\,\ddot{x}_P(t) + \boldsymbol{j}\,\ddot{y}_P(t) + \boldsymbol{k}\,\ddot{z}_P(t) \tag{1.6}$$

Dessa ekvationer antas gälla för alla materiella kroppar (fast kroppar, fluider, gaser) i alla rörelser relativt en inertialram. De utgör mekanikens axiom.



Figur 1.3 Euler's rörelselagar i en inertialram och Euler själv.

Som sagt, en inertialram är en referensram i vilken Euler's rörelselagar gäller. Detta är en i grunden teoretisk konstruktion som har samband med Newton's föreställning om det *absoluta rummet*. I praktiken har man svårt att identifiera inertialramar och man får ofta nöja sig med referensramar som approximativt är inertialramar. Om approximationen duger kan endast avgöras genom experiment. För rörelser inom solsystemet, t ex jordens rörelse, brukar man som approximativ inertialram välja en referensram som *inte* roterar i förhållande till 'fixstjärnorna', och i vilken solsystemets masscentrum rör sig med konstant hastighet. För rörelser hos kroppar i närheten av jordytan är det praktiskt att välja jorden som referensram. Denna är dock inte en inertialram, detta på grund av jordens rotation i förhållande till den approximativa inertialramen för solsystemet. Detta kan man kompensera med att införa så kallade **tröghetskrafter** som beror på jordens rotationshastighet (ett varv per dygn) och på kropparnas rörelse relativt jorden. Dessa 'krafter' är i allmänhet små i jämförelse med gravitationskraften och andra krafter som verkar på kroppen.

Sats: (**Nödvändigt jämviktsvillkor**) Om en materiell kropp befinner sig i jämvikt i förhållande till en inertialram så är systemet av yttre krafter och moment på kroppen ett **nollsystem**, d v s

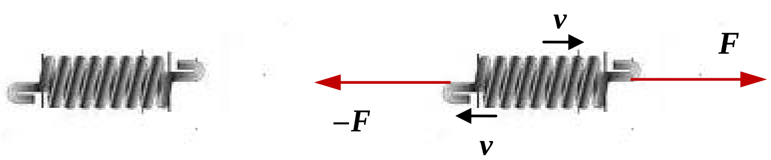
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \,, \quad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0} \tag{1.7}$$

Bevis: Jämvikt $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}_P(t)=\boldsymbol{u}$, $\forall P \in \mathcal{B}$, där $\boldsymbol{u}$ är en konstant vektor $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}_P(t)=\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$. Av detta följer, enligt Euler's rörelselagar,

$$\boldsymbol{F}=\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{a}_P\,dm_P=\boldsymbol{0}\,,\ \boldsymbol{M}_O=\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{r}_P\times\boldsymbol{a}_P\,dm_P=\boldsymbol{0}$$

vilket skulle bevisas. □

Observera att denna sats gäller för alla kroppar oavsett konstitution (fasta kroppar, vätskor, gaser). För stela kroppar har vi även omvändningen till ovanstående sats: En stel kropp kan inte sättas i rörelse av ett system av yttre krafter och moment som utgör ett nollsystem. Om den är i vila så förblir den i vila så länge $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ och $\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{0}$. Observera att detta inte gäller för alla kroppar, t ex inte för en elastisk kropp. Om den obelastade fjädern i figur a) nedan befinner sig i vila och därefter belastas med ett nollsystem bestående av två punktkrafter så förblir inte fjädern i vila. Den kommer att sträckas, d v s partiklarna i fjädern kommer i rörelse.



a) b)

Figur 1.4 Elastisk kropp belastad med nollsystem

Jämviktsvillkoren (1.7) består av två **vektorekvationer**. Detta är ekvivalent med sex **skalära ekvationer**. Med en HON-bas $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ gäller

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}F_x+\boldsymbol{j}F_y+\boldsymbol{k}F_z\,,\ \boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{i}M_x+\boldsymbol{j}M_{O,y}+\boldsymbol{k}M_{O,z}$$

och då är villkoren i (3.7) är då ekvivalenta med ekvationssystemet

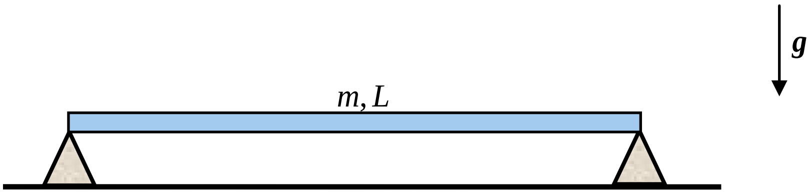
$$\begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\F_z=0\end{cases}\ \text{och}\ \begin{cases}M_x=0\\M_y=0\\M_z=0\end{cases}\qquad(1.8)$$

Vi noterar också att jämviktsvillkoret (1.7) medför att $\boldsymbol{M}_A=\boldsymbol{0},\ \forall A$, d v s om kraftsumman är noll och momentsumma är noll, med avseende på någon momentpunkt (t ex *O*), så är momentsumman noll med avseende på alla andra punkter också. Detta följer av (1.7) och sambandformeln för moment

$$\boldsymbol{M}_A=\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{r}_{OA}\times\boldsymbol{F}\qquad(1.9)$$

Statiskt bestämda och statiskt obestämda kraftsystem: I tredimensionella problem har vi tillgång till **sex skalära jämviktsekvationer**. Detta innebär att vi högst kan ha sex obekanta kraft- och moment-komponenter för en erhålla en entydig lösning. Om en entydig lösning existerar säger vi att jämviktsproblemet är **statiskt bestämt**. Om antalet obekanta är större än sex säger vi att jämviktsproblemet är **statiskt obestämt** (underbestämt ekvationssystem). För plana (tvådimensionella problem) har vi tillgång till tre skalära ekvationer vilket kräver högst tre obekanta kraft- och moment-komponenter för en entydig lösning.

Exempel 1.1: **Statiskt bestämt system**: Planka på två stöd. En homogen planka med massan m och längden L vilar mot två stöd enligt nedanstående figur. Bestäm stödreaktionerna, d v s krafterna från stöden på plankan!

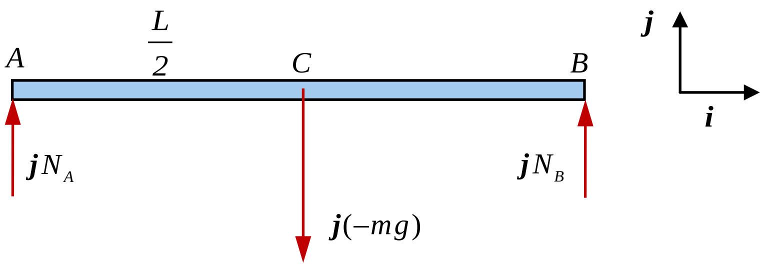


Figur 1.5 Planka på två stöd.

Frilägg plankan, d v s ta bort stöden och inför stödreaktioner i form av normalkrafts-komponenter: N_A och N_B samt tyngdkraften på plankan mg, som angriper i plankans masscentrum (mittpunkt) *C*. Se figuren nedan! Systemet av yttre krafter på plankan ges av

$$\mathcal{F}^y: \ (\boldsymbol{j}N_A, A), \ (\boldsymbol{j}(-mg), C), \ (\boldsymbol{j}N_B, B) \tag{1.10}$$

Antalet obekanta kraftkomponenter är här två, nämligen N_A och N_B.



Figur 1.6 Frilagd planka.

Jämvikt medför att $\mathcal{F}^y$ är ett nollsystem:

$$(\uparrow): \ N_A - mg + N_B = 0, \quad \curvearrowleft C: \ -N_A \frac{L}{2} + N_B \frac{L}{2} = 0 \tag{1.11}$$

Vi kräver dessutom att (**tilläggsvillkor**)

$$N_A \geq 0, \ N_B \geq 0 \tag{1.12}$$

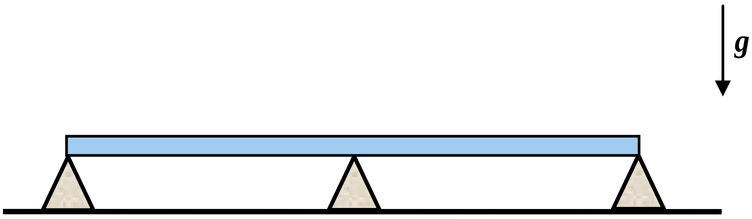
Vad innebär dessa villkor fysikaliskt?

Observera att jämviktsvillkoret för kraftsumman i $\boldsymbol{i}$ -led är trivialt uppfyllt, eftersom

$$(\rightarrow): \ 0 = 0$$

Ekvationssystemet (1.11) har den **entydiga lösningen** $N_A = N_B = \frac{mg}{2} > 0$. Kraftsystemet (1.10) är alltså **statiskt bestämt**. Observera att villkoren i (1.12) är uppfyllda.

Exempel 1.2: Statiskt obestämt system: Planka på tre stöd. En homogen planka med massan m och längden L vilar mot tre stöd enligt nedanstående figur. Det tredje stödet placeras mitt under plankan. Bestäm stödreaktionerna!

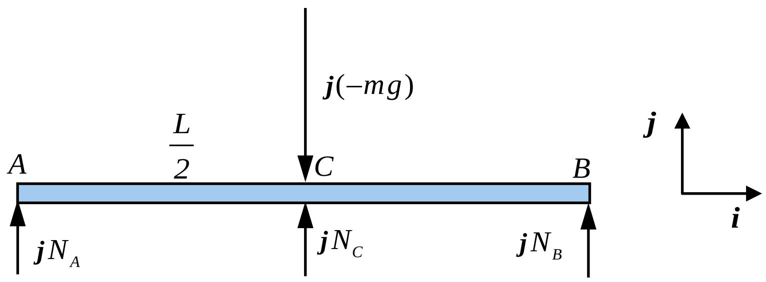


Figur 1.7 Planka på tre stöd.

Frilägg plankan d v s ta bort stöden och inför stödreaktioner i form av normalkrafts-komponenter: N_A, N_B och N_C samt tyngdkraften på plankan mg. Systemet av yttre krafter på plankan ges av

$$\mathcal{F}^y : \ (\boldsymbol{j}N_A, A), \ (\boldsymbol{j}(-mg), C), \ (\boldsymbol{j}N_B, B), \ (\boldsymbol{j}N_C, C) \qquad (1.13)$$

Antalet obekanta kraftkomponenter är här tre, nämligen N_A, N_B och N_C.



Figur 1.8 Frilagd planka.

Jämvikt medför (se figur)

$$(\uparrow): \ N_A + N_C - mg + N_B = 0, \quad \circlearrowleft C: \ -N_A\frac{L}{2} + N_B\frac{L}{2} = 0 \qquad (1.14)$$

Vi kräver dessutom att

$$N_A \geq 0, \ N_B \geq 0, \ N_C \geq 0$$

Ekvationssystemet (1.14) medför att

$$\begin{cases} N_A = N_B \\ N_C = mg - 2N_B \end{cases}$$

Lösningen är således inte entydig eftersom vi kan välja N_B godtyckligt i intervallet $0 \leq N_B \leq \dfrac{mg}{2}$.
Vi kan som lösning ha t ex $N_C = mg,\ N_A = N_B = 0$, d v s plankan balanserar på mittenstödet utan mekanisk kontakt med de båda andra. Kraftsystemet (1.13) är alltså **statiskt obestämt**.

Sammanfattning (Jämvikt)

En kropp $\mathcal{B}$ påverkas av ett system av **yttre krafter** $\mathcal{F}^y$. Då gäller **Euler's rörelselagar**

$$\boldsymbol{F} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{a}_P\, dm_P \ , \ \boldsymbol{M}_O = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{a}_P\, dm_P$$

Jämvikt medför ($\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{0},\ \forall P \in \mathcal{B}$)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \text{och} \ \begin{cases} M_{O,x} = 0 \\ M_{O,y} = 0 \\ M_{O,z} = 0 \end{cases}$$

och innebär att $\mathcal{F}^y$ utgör ett **nollsystem**.

Viktiga speciella kraftsystem (som t ex är flitigt förekommande i övningsuppgifter i denna kurs) är ett **nollsystem bestående av två eller tre punktkrafter**. Givet ett kraftsystem bestående av två punktkrafter

$$\mathcal{F}:\ (\boldsymbol{F}_1, P_1),\ (\boldsymbol{F}_2, P_2)$$

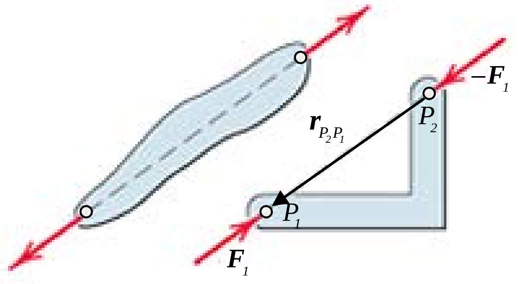
som är ett nollsystem. Då gäller för kraftsumman och momentsumman

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0} \ , \ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{P_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{P_2} \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$$

Av detta följer att

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1 \ \text{och} \ (\boldsymbol{r}_{P_1} - \boldsymbol{r}_{P_2}) \times \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{r}_{P_2P_1} \parallel \boldsymbol{F}_1$$

d v s vi har den situation som visas i figuren nedan



Figur 1.9 Nollsystem bestående av två punktkrafter.

Givet ett kraftsystem bestående av tre punktkrafter

$$\mathcal{F}:\ (\boldsymbol{F}_1, P_1),\ (\boldsymbol{F}_2, P_2),\ (\boldsymbol{F}_3, P_3)$$

Antag att $\mathcal{F}$ är ett nollsystem. Då gäller att

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{0}\ ,\ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{P_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{P_2} \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_{P_3} \times \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{0}$$

Av detta följer att

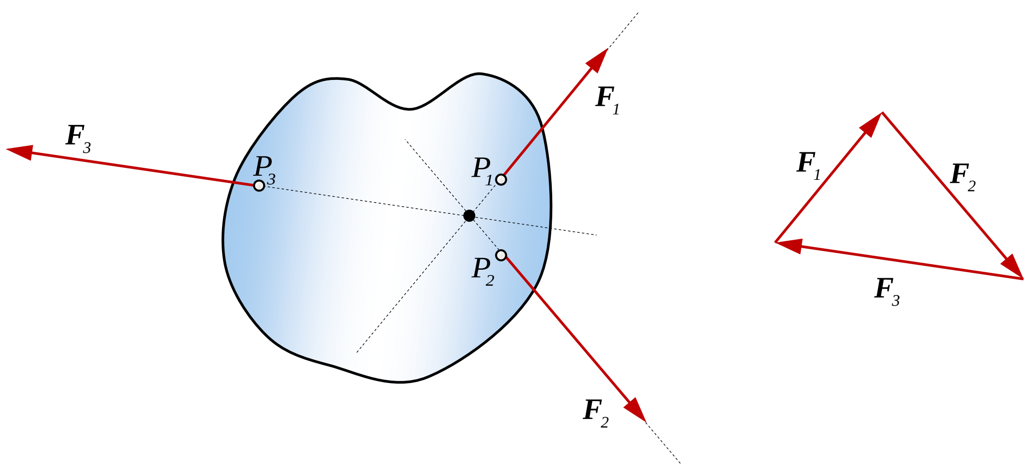
$$-\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2\ ,\ \boldsymbol{r}_{P_3} \times (-\boldsymbol{F}_3) = \boldsymbol{r}_{P_1} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_{P_2} \times \boldsymbol{F}_2$$

och därmed kan vi sluta oss till att tvåkraftsystemet

$$\mathcal{F}':\ (\boldsymbol{F}_1, P_1),\ (\boldsymbol{F}_2, P_2)$$

har kraftresultanten $(-\boldsymbol{F}_3, P_3)$. Av detta följer att

Sats: För ett nollsystem bestående av tre punktkrafter gäller att krafternas verkningslinjer ligger i ett gemensamt plan, antingen skär de varandra i en punkt eller också är de parallella.



Figur 1.10 Nollsystem bestående av tre punktkrafter.

Friläggning: När man analyserar en mekanisk kropp (mekaniskt system) $\mathcal{B}$ önskar man, med utgångspunkt från givna förutsättningar, besvara ett antal frågeställningar som kan handla om systemets jämviktstillstånd, systemets rörelse, krafter mellan kroppar i systemet eller krafter mellan kroppar i systemet och dess omgivning. Analysen kräver ett **metodisk förfarande** som väsentligen innehåller följande steg:

(i) Välj, med hänsyn till aktuell frågeställning, ut en **delkropp** (*part*) $\mathcal{B}_1$ i den aktuella kroppen $\mathcal{B}$.

(ii) Frilägg den valda delkroppen $\mathcal{B}_1$, d v s rita en så kallad **frikroppsfigur** (*free body diagram*) över denna. Detta innebär att
- man ritar en geometriskt representativ bild av den valda kroppen där alla omgivande kroppar har tagits bort.
- man inför de **yttre kända, anbringade krafterna** (*applied forces*) som verkar på $\mathcal{B}_1$, t ex tyngdkraften.
- man inför **reaktionskrafter** (kontaktkrafter, *reactions*) som verkar på $\mathcal{B}_1$ från de borttagna omgivande kropparna. Dessa krafter är i allmänhet okända. Ställ upp eventuella restriktioner på kontaktkrafterna som ges av kontaktens natur, t ex för normalkraft och friktionskraft.

(iii) Ställ upp **jämviktsekvationerna** (1.7) för $\mathcal{B}_1$.

(iv) **Lös jämviktsekvationerna** för $\mathcal{B}_1$ (om det är möjligt), d v s bestäm de obekanta storheterna.

(v) Om antalet obekanta är för stort, d v s om vi har fler obekanta än antalet ekvationer, tvingas man frilägga ytterligare en delkropp $\mathcal{B}_2$, som bör väljas så att är i mekanisk kontakt med $\mathcal{B}_1$.

(vi) Genomför stegen (i)-(iv) för delkropp $\mathcal{B}_2$.

(vii) Lös det ekvationssystem som ges av jämviktsekvationerna för $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$, (om det är möjligt).

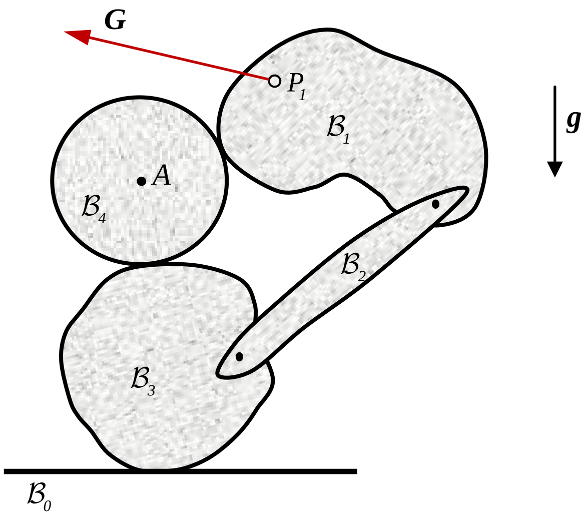
(viii) Om antalet obekanta är för stort, d v s om vi har fler obekanta än antalet ekvationer tvingas man frilägga ytterligare en kropp i det mekaniska systemet, $\mathcal{B}_3$, och så vidare!

Det är viktigt att i varje steg **kontrollera antalet obekanta och antalet ekvationer**.

Denna procedur upprepas och leder förhoppningsvis till ett ekvationssystem som ger en entydig lösning. I de fall där det inte fungerar har man att göra med statiskt obestämda kraftsystem. Det är då nödvändigt att införa antaganden om hur kropparna deformeras under belastning för att man skall kunna hitta en lösning. Detta behandlas t ex i kurserna i Kontinuumsmekanik och Hållfasthetslära.

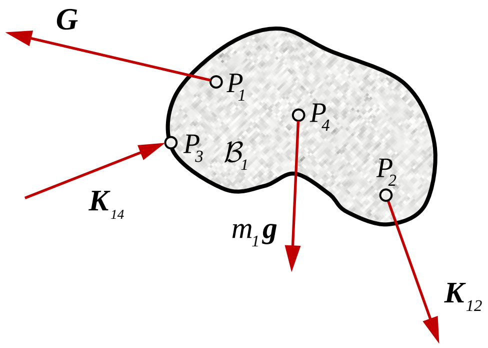
Figur 1.11 Struktur i jämvikt.

Exempel 1.3: Betrakta en kropp $\mathcal{B}$ som består av fyra delkroppar $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ och $\mathcal{B}_4$. Delkroppen $\mathcal{B}_1$ påverkas av en yttre, anbringad kraft $(\boldsymbol{G}, P_1)$. Delkropparna är i kontakt och delkroppen $\mathcal{B}_3$ stöder mot ett fixt fundament $\mathcal{B}_0$ och delkropp $\mathcal{B}_4$ är kopplad till $\mathcal{B}_0$ via en axel genom punkten A. Frilägg delkropparna och ställ upp jämviktsvillkor för delkropp $\mathcal{B}_1$.



Figur 1.12 Kropp (mekaniskt system)

Frilägg delkropp $\mathcal{B}_1$, d v s rita en figur över $\mathcal{B}_1$ där övriga kroppar har tagits bort och kontaktkrafter mellan $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$, och mellan $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_4$ införts enligt figuren nedan.



Figur 1.13 Frilagd delkropp.

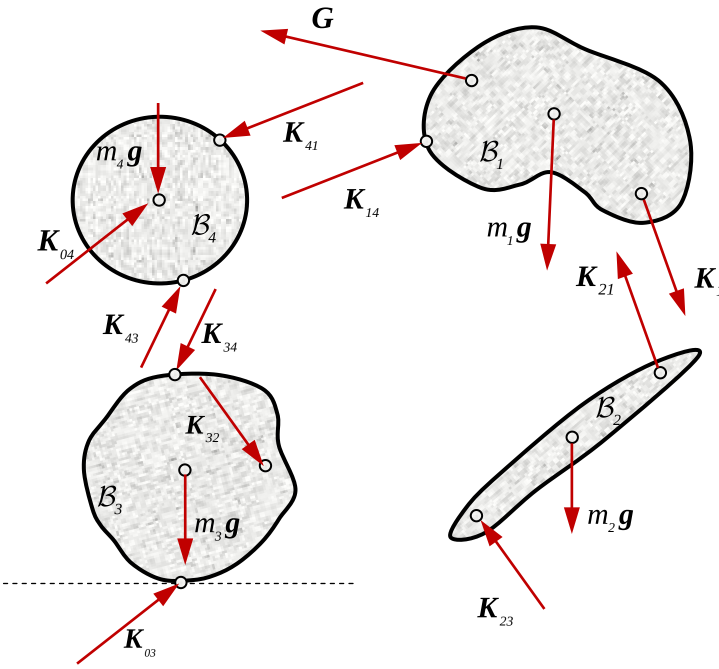
Det system av yttre krafter som verkar på kroppen $\mathcal{B}_1$

$$\mathcal{F}^y(\mathcal{B}_1): \ (\boldsymbol{G}, P_1), \ (\boldsymbol{K}_{12}, P_2), \ (\boldsymbol{K}_{14}, P_3), \ (m_1\boldsymbol{g}, P_4) \qquad (1.15)$$

Jämviktsvillkor för kroppen $\mathcal{B}_1$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{K}_{12} + \boldsymbol{K}_{14} + m_1\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_{P_1} \times \boldsymbol{G} + \boldsymbol{r}_{P_2} \times \boldsymbol{K}_{12} + \boldsymbol{r}_{P_3} \times \boldsymbol{K}_{14} + \boldsymbol{r}_{P_4} \times m_1\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \qquad (1.16)$$

där t ex vektorn $\boldsymbol{K}_{14}$ representerar reaktionen från delkropp $\mathcal{B}_4$ på delkropp $\mathcal{B}_1$. Om vi frilägger övriga delkroppar så erhålles frikroppsfigurer enligt nedan



Figur 1.14 Frilagda delkroppar.

Det gäller att

$$\boldsymbol{K}_{21} = -\boldsymbol{K}_{12}\,,\ \boldsymbol{K}_{32} = -\boldsymbol{K}_{23}\,,\ \boldsymbol{K}_{43} = -\boldsymbol{K}_{34}\,,\ \boldsymbol{K}_{41} = -\boldsymbol{K}_{14} \tag{1.17}$$

som ett uttryck för **lagen om verkan och motverkan** (”Newton’s tredje lag”).

Vi skall nu demonstrera metoden med friläggning på några problem där kraftsystemet är tvådimensionellt (plant). Vi kommer senare att studera tredimensionella problem.

Plana jämviktsproblem: För ett **plant kraftsystem**, parallellt med $\boldsymbol{i}$ - $\boldsymbol{j}$ -planet, gäller per definition att $F_z = 0$, $M_{O,x} = M_{O,y} = 0$ och jämviktsvillkoret reduceras därmed till tre skalära ekvationer

$$F_x = 0\,,\ F_y = 0\,,\ M_{O,z} = 0 \tag{1.18}$$

Alternativt, för att plant kraftsystem, kan vi använda de med (1.18) ekvivalenta villkoren

$$F_x = 0\,,\ M_{A,z} = 0\,,\ M_{B,z} = 0 \tag{1.19}$$

där *A* och *B* är (godtyckliga punkter) för vilka $\boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$, eller

$$M_{A,z} = 0\,,\ M_{B,z} = 0\,,\ M_{C,z} = 0 \tag{1.20}$$

där punkterna *A*, *B* och *C* *ej* ligger på samma räta linje. Detta följer av sambandsformeln (1.9) där $\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{k}M_{A,z}$, $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{k}M_{O,z}$, $\boldsymbol{r}_{OA} = \boldsymbol{i}x_A + \boldsymbol{j}y_A$, $\boldsymbol{r}_{OB} = \boldsymbol{i}x_B + \boldsymbol{j}y_B$ och $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}F_x + \boldsymbol{j}F_y$. Detta ger

$$M_{A,z} = M_{O,z} + x_A F_y - y_A F_x \,,\; M_{B,z} = M_{O,z} + x_B F_y - y_B F_x \tag{1.21}$$

Implikationen (1.18)$\Rightarrow$(1.19) är uppenbar. Antag nu att (1.19) gäller, då följer av (1.21)

$$0 = M_{O,z} + x_A F_y \,,\; 0 = M_{O,z} + x_B F_y \Rightarrow (x_B - x_A)F_y = 0$$

Men här gäller att $x_B - x_A \neq 0$ eftersom motsatsen skulle innebära att $\boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F} = (x_B - x_A)F_y - (y_B - y_A)F_x = 0$. Slutsatsen blir då att $F_y = 0$ och därmed $M_{O,z} = 0$. Att (1.18) medför (1.20) är uppenbart. Omvändningen följer om man betraktar ekvationssystemet

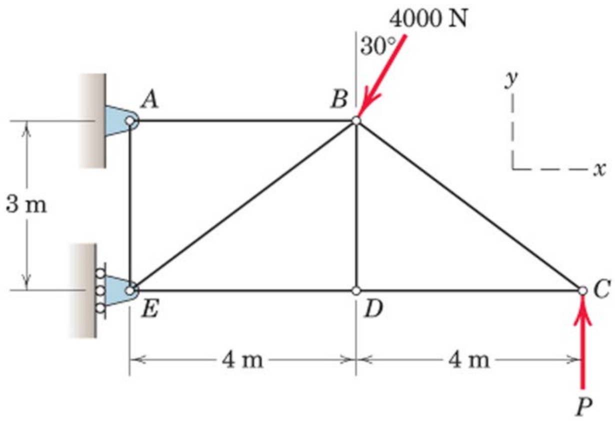
$$\begin{cases} 0 = M_{O,z} + x_A F_y - y_A F_x \\ 0 = M_{O,z} + x_B F_y - y_B F_x \\ 0 = M_{O,z} + x_C F_y - y_C F_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_{O,z} = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

eftersom systemdeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & x_A & -y_A \\ 1 & x_B & -y_B \\ 1 & x_C & -y_C \end{vmatrix} = -(x_{CA}y_{CB} - x_{CB}y_{CA}) \neq 0 \tag{1.23}$$

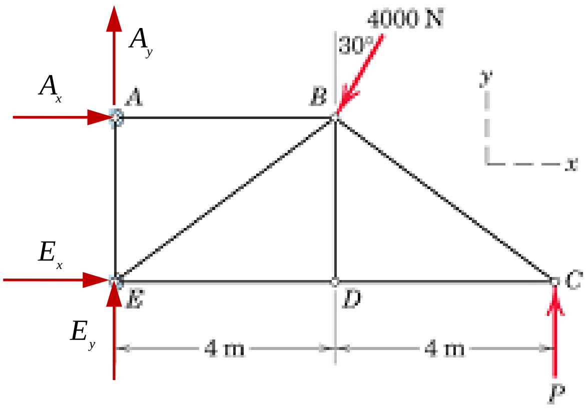
Vi har nämligen antagit att punkterna *A*, *B* och *C* ej ligger på samma räta linje vilket innebär att $\boldsymbol{r}_{CA} \times \boldsymbol{r}_{CB} = \boldsymbol{k}(x_{CA}y_{CB} - x_{CB}y_{CA}) \neq \boldsymbol{0}$.

Exempel 1.4 Determine the reactions at *A* and *E* if $P = 500N$. What is the maximum value which P may have for static equilibrium? Neglect the weight of the structure compared with applied loads.



Figur 1.15 Exempel 1.4

Lösning: Frilägg strukturen. Knutpunkterna *A* och *B* är försedda med friktionsfria leder och därmed momentfria vilket innebär att reaktionen i dessa punkter ges av krafter. Vi inför reaktions-kraftkomponenterna A_x, A_y, E_x, E_y med referensriktningar enligt figuren nedan.



Figur 1.16 Lösning 3/20

Av Figur 1.15 framgår att $E_y = 0$ ("stödet vilar på rullar") och att $E_x \geq 0$. Jämvikt medför

$$(\rightarrow): \ A_x + E_x - 4000 \sin 30° = 0, \ (\uparrow): \ A_y + P - 3000 \cos 30° = 0 \tag{1.24}$$

$$\curvearrowleft A: \ 3 \cdot E_x + 8 \cdot P - 4 \cdot 4000 \cos 30° = 0 \tag{1.25}$$

Detta ger

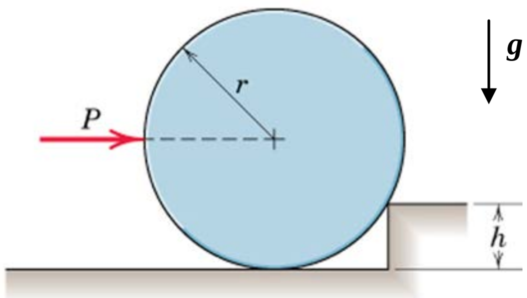
$$E_x = \frac{4 \cdot 4000 \cos 30° - 8 \cdot P}{3}, \ A_x = 4000 \sin 30° - E_x, \ A_y = 4000 \cos 30° - P \tag{1.26}$$

Med $P = 500 N$ erhålles $E_x = 3285 N$, $A_x = 4000 \sin 30° - E_x = -1285 N$, $A_y = 2964 N$
Kravet $E_x \geq 0$ medför, enligt $(1.26)_1$, att

$$4 \cdot 4000 \cos 30° - 8 \cdot P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq \frac{4 \cdot 4000 \cos 30°}{8} = 1732 N$$

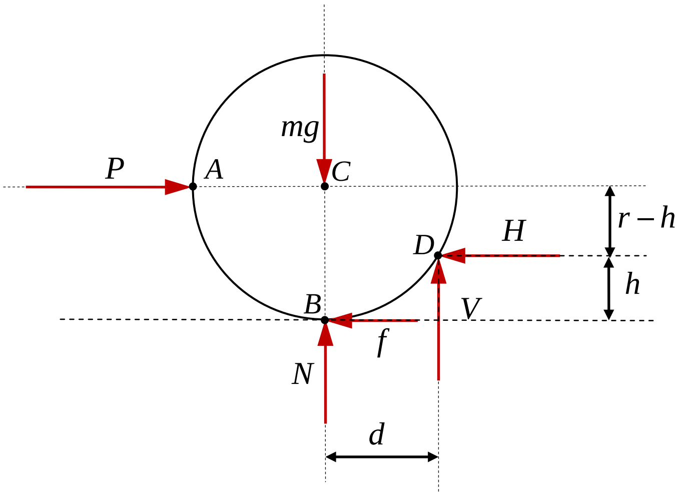
Föreläsning 2: Jämvikt för plana och tredimensionella problem (3/3-3/4).

Exempel 2.1 Determine the force P required to begin rolling the uniform cylinder of mass m over the obstruction of height h.



Figur 2.1 Exempel 2.1.

Lösning: Frilägg cylindern! Inför den anbringade kraften P i punkten *A*. Inför tyngdkraften mg angripande i punkten *C* på cylinderns symmetriaxel. Inför reaktionskrafter N, f från den horisontella ytan i punkten *B* och N, V från hörnet i punkten *D*.



Figur 2.2 Lösning 2.1.

Jämvikt medför:

$$(\rightarrow):\ P - H - f = 0,\ (\uparrow):\ N - mg + V = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{D}:\ -(r-h)P + (mg - N)d - fh = 0 \tag{2.1}$$

där $d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2}$. Obekanta reaktionskrafter: $N,\ f,\ H,\ V$, d v s fyra till antalet. Vi har, enligt (2.1), bara tre ekvationer och problemet är således statiskt obestämt. Nu gällde problemet att bestämma det P som krävs för att cylindern skall börja rulla över kanten. I det läget upphör kontakten i punkten *B* och vi kan sätta $N = f = 0$. Då gäller, enligt $(2.1)_3$,

$$-(r-h)P + mgd = 0 \Rightarrow P = \frac{mgd}{r-h} = \frac{mg\sqrt{r^2-(r-h)^2}}{r-h}$$

vilket är den efterfrågade kraften. Vi kan nu även beräkna reaktionen i punkten *D*. Av $(2.1)_{1,2}$ följer

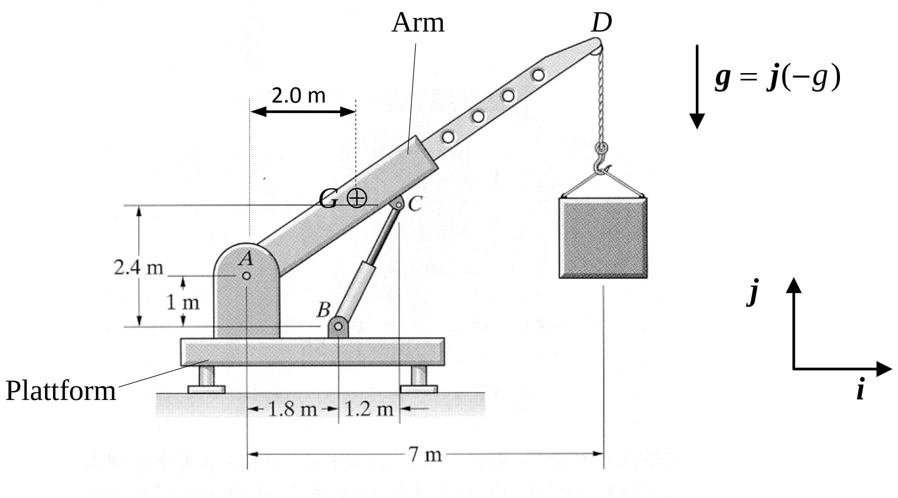
$$P - H = 0,\ -mg + V = 0 \Rightarrow H = P = \frac{mg\sqrt{r^2-(r-h)^2}}{r-h},\ V = mg$$

Exempel 2.2 En kran består av en arm *AD* med massan $200\ kg$ som är infäst i en plattform. Armen är friktionsfritt lagrad i plattformen med en horisontell axel genom *A*. Armens mass-centrum *G* befinner sig i det aktuella läget på det (horisontella) avståndet $2.0\,m$ från armens infästning i *A*. Hydraulcylindern *BC* påverkar armen med en kraft som är riktad längs *BC*. Kranen lyfter en låda med massan $800 kg$. Bestäm, vid jämvikt i det aktuella läget, se figur nedan

a) Cylinderkraftens belopp

b) Reaktionskraften, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}H + \boldsymbol{j}V$, från plattformen på armen i *A*.

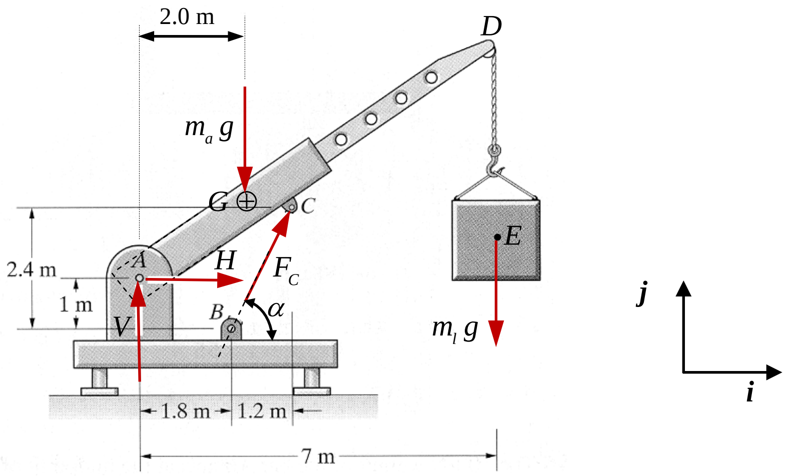
Tyngdaccelerationen $g = 9.81\ ms^{-2}$. Behandla problemet som ett *plant problem*!



Figur 2.3 Exempel 2.2.

Lösning: Frilägg den kropp som består av kranarmen *AD*, lyftkrok och låda! Inför tyngdkrafterna $m_a\boldsymbol{g}$ och $m_l\boldsymbol{g}$ där $m_a = 200\ kg$ är armens massa och $m_l = 800\ kg$ är lådans massa. Inför kraften från cylindern, $\boldsymbol{F}_C$, $F_C = |\boldsymbol{F}_C|$, och reaktionskraften $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}H + \boldsymbol{j}V$ från plattformen. Systemet av yttre krafter på den frilagda kroppen ges då av

$$\mathcal{F}^y:\ (\boldsymbol{R}, A),\ (m_a\boldsymbol{g}, G),\ (\boldsymbol{F}_C, C),\ (m_l\boldsymbol{g}, E)$$



Figur 2.4 Frilagd kranarm.

Jämvikt medför:

$$(\uparrow):\ V - m_a g + F_C \sin\alpha - m_l g = 0\,,\ \ (\rightarrow):\ H + F_C \cos\alpha = 0 \tag{2.2}$$

$$A: \; -2 \cdot m_a g - 1.4 \cdot F_C \cos\alpha + 3 \cdot F_C \sin\alpha - 7 \cdot m_l g = 0$$

Geometrin ger att $F_C \sin\alpha = 2F_C \cos\alpha$. Detta insatt i $(2.2)_3$ ger ekvationen

$$-2 \cdot m_a g + 4.6 \cdot F_C \cos\alpha - 7 \cdot m_l g = 0 \Rightarrow F_C \cos\alpha = \frac{2 \cdot m_a + 7 \cdot m_l}{4.6} g =$$

$$\frac{2 \cdot 200 + 7 \cdot 800}{4.6} 9.81 \simeq 12.8 kN$$

och därmed $F_C \sin\alpha = 25.6 kN$. Detta ger cylinderkraftens belopp

$$F = \sqrt{(12.8)^2 + (25.6)^2} kN = 28.6 kN$$

Av $(2.2)_1$ följer att

$$V = (m_a + m_l) g - F_C \sin\alpha = 1000 \cdot 9.81 N - 25.6 kN = -15.8 kN \; , \quad H = -F_C \cos\alpha = -12.8 kN$$

och således $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}(-12.8kN) + \boldsymbol{j}(-15.8kN)$.

<u>Svar:</u> a) $F_C = 28.6 kN$, b) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}(-12.8kN) + \boldsymbol{j}(-15.8kN)$.

Tredimensionella jämviktsproblem: Jämviktsvillkoren ges av (1.7)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \; , \; \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$$

Detta är ekvivalent med villkoren

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{0} \; , \; \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{0} \; , \; \boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{0} \tag{2.3}$$

under förutsättning att $\boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{r}_{AC} \neq \boldsymbol{0}$, d v s att punkterna A, B och C ej ligger på en rät linje. Förflyttningssatsen för moment ger nämligen

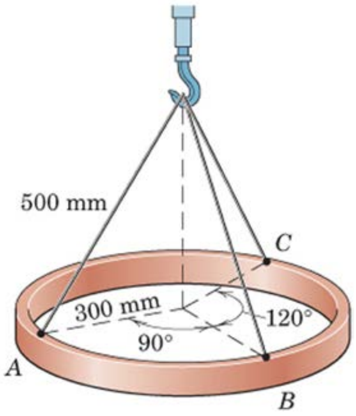
$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{OA} \times \boldsymbol{F} \; , \; \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{OB} \times \boldsymbol{F} \; , \; \boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{r}_{OC} \times \boldsymbol{F} \tag{2.4}$$

och därmed är det klart att (1.7) medför (2.3). Omvänt, om (2.3) gäller så följer av (2.4) att

$$\boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_{AC} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

eftersom $\boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{r}_{AC} \neq \boldsymbol{0}$. Av (2.4) följer då att $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$.

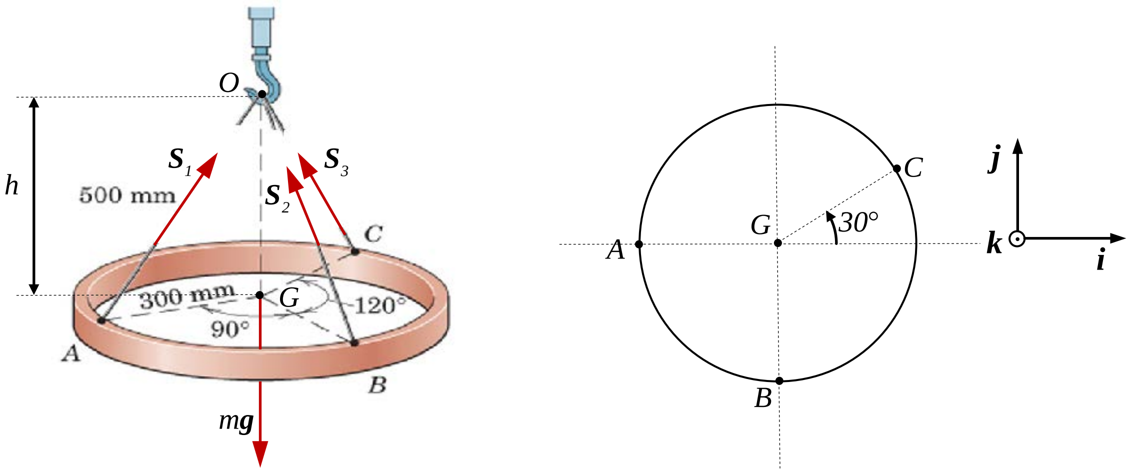
Problem 3/77 A uniform steel ring $600mm$ in diameter has a mass of $50kg$ and is lifted by the three cables, each $500mm$ long, attached at points *A*, *B* and *C* as shown. Compute the tension in each cable.



Figur 2.5 Problem 3/77.

Lösning: Frilägg ringen. Inför spännkrafterna i linorna $(\boldsymbol{S}_1, A)$, $(\boldsymbol{S}_2, B)$, $(\boldsymbol{S}_3, C)$ samt tyngdkraften $(m\boldsymbol{g}, G)$ angripande i ringens masscentrum *G*. Dessa utgör det system av yttre krafter som verkar på ringen. Jämvikt medför:

$$\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_1 + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \tag{2.5}$$



Figur 2.6 Lösning 3/77.

Av figuren framgår att $\boldsymbol{r}_{AO} = \boldsymbol{i}\,0.3 + \boldsymbol{k}h$, $\boldsymbol{r}_{BO} = \boldsymbol{j}\,0.3 + \boldsymbol{k}h$, $\boldsymbol{r}_{CO} = \boldsymbol{i}(-0.3\frac{\sqrt{3}}{2}) + \boldsymbol{j}(-\frac{0.3}{2}) + \boldsymbol{k}h$ där $h = \sqrt{0.5^2 - 0.3^2} = 0.4$. Vi kan skriva $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{n}_{AO}S_1$, $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{n}_{BO}S_2$, $\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{n}_{CO}S_3$, där vi har tilläggs-villkoren $S_1, S_2, S_3 \geq 0$, och

$$\boldsymbol{n}_{AO} = \frac{\boldsymbol{r}_{AO}}{|\boldsymbol{r}_{AO}|} = \frac{\boldsymbol{i}0.3 + \boldsymbol{k}h}{0.5} = \boldsymbol{i}0.6 + \boldsymbol{k}0.8\,,\ \boldsymbol{n}_{BO} = \frac{\boldsymbol{r}_{BO}}{|\boldsymbol{r}_{BO}|} = \frac{\boldsymbol{j}0.3 + \boldsymbol{k}h}{0.5} = \boldsymbol{j}0.6 + \boldsymbol{k}0.8\,,$$

$$\boldsymbol{n}_{CO} = \frac{\boldsymbol{r}_{CO}}{|\boldsymbol{r}_{CO}|} = \frac{\boldsymbol{i}(-0.3\frac{\sqrt{3}}{2}) + \boldsymbol{j}(-\frac{0.3}{2}) + \boldsymbol{k}h}{0.5} = \boldsymbol{i}(-0.3\sqrt{3}) + \boldsymbol{j}(-0.3) + \boldsymbol{k}0.8$$

Av (2.5) följer då att

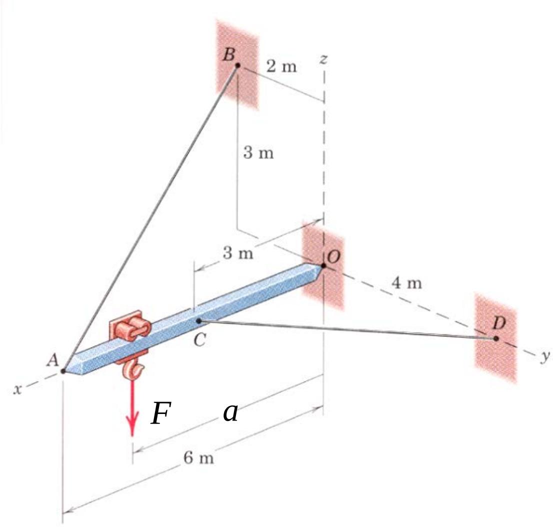
$$(\boldsymbol{i}0.6 + \boldsymbol{k}0.8)S_1 + (\boldsymbol{j}0.6 + \boldsymbol{k}0.8)S_2 + (\boldsymbol{i}(-0.3\sqrt{3}) + \boldsymbol{j}(-0.3) + \boldsymbol{k}0.8)S_3 + \boldsymbol{k}(-mg) =$$

$$\boldsymbol{i}(0.6S_1 - 0.3\sqrt{3}S_3) + \boldsymbol{j}(0.6S_2 - 0.3S_3) + \boldsymbol{k}(0.8(S_1 + S_2 + S_3) - mg) = \boldsymbol{0}$$

vilket är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0.6S_1 - 0.3\sqrt{3}S_3 = 0 \\ 0.6S_2 - 0.3S_3 = 0 \\ 0.8(S_1 + S_2 + S_3) - mg = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = \dfrac{\sqrt{3}mg}{0.8(3+\sqrt{3})} = 224N \\ S_2 = \dfrac{mg}{0.8(3+\sqrt{3})} = 129.6N \\ S_3 = \dfrac{mg}{0.4(3+\sqrt{3})} = 259N \end{cases}$$

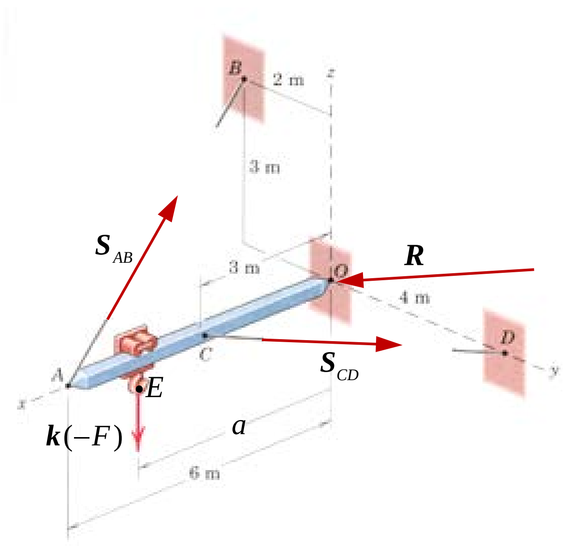
Exempel 2.3: (Tentamen 110112, Uppgift 2) Den horisontella bommen *OA* är upphängd i linor *AB* och *CD* och stöder i *O*, via en glatt fix kulled, mot en vertikal vägg. Bommen belastas enligt figuren, med en vertikal kraft F på avståndet a ($0 < a < 6m$) från *O*. Bestäm, vid jämvikt, spännkrafterna i linorna *AB* och *CD* som funktion av F och a. Försumma linornas massa samt bommens och krokens egentyngd.



Figur 2.7 Exempel 2.3.

Lösning: Frilägg bommen *OA*! Snitta linorna och inför spännkrafterna $\boldsymbol{S}_{AB}$ och $\boldsymbol{S}_{CD}$. Frilägg bommen från väggen och inför reaktionskraften $\boldsymbol{R}$ från väggen på bommen. Observera att vektorn $\boldsymbol{R}$ är godtyckligt inritad i Figur 3.24 då den i detta läge är okänd. Belastningen på kroken ges av kraften $\boldsymbol{k}(-F)$. Systemet av yttre krafter på bommen ges då av

$$\mathcal{F}^{y}: \ (\boldsymbol{S}_{AB}, A),\ (\boldsymbol{S}_{CD}, C),\ (\boldsymbol{R}, O),\ (\boldsymbol{k}(-F), E)$$



Figur 2.8 Frilagd bom.

Jämvikt medför

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}_{AB} + \boldsymbol{S}_{CD} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{k}(-F) = \boldsymbol{0}\,,\ \ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{S}_{AB} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{S}_{CD} + \boldsymbol{r}_E \times \boldsymbol{k}(-F) = \boldsymbol{0} \qquad (2.6)$$

Spännkrafterna ges av

$$\boldsymbol{S}_{AB} = \boldsymbol{n}_{AB} S_{AB}\,,\ \ \boldsymbol{S}_{CD} = \boldsymbol{n}_{CD} S_{CD}$$

där $\boldsymbol{n}_{AB}$ och $\boldsymbol{n}_{CD}$ är riktningsvektorer för spännkrafterna. Av geometrin framgår att

$$\boldsymbol{n}_{AB} = \frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{|\boldsymbol{r}_{AB}|} = \frac{(-6,-2,3)}{\sqrt{(-6)^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{1}{7}(-6,-2,3)$$

$$\boldsymbol{n}_{CD} = \frac{\boldsymbol{r}_{CD}}{|\boldsymbol{r}_{CD}|} = \frac{(-3,4,0)}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}} = \frac{1}{5}(-3,4,0)$$

där vi uttryckt lägesvektorerna $\boldsymbol{r}_{AB}$ och $\boldsymbol{r}_{CD}$ i komponentform, i basen $(\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k})$. Vidare gäller att

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i}6\,,\ \ \boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{i}3\,,\ \ \boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{i}a + \boldsymbol{k}(-e)\ \ (m)$$

Detta, tillsammans med $(2.6)_2$, ger villkoret

$$\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{S}_{AB} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{S}_{CD} + \boldsymbol{r}_E \times \boldsymbol{k}(-F) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ \frac{-6}{7}S_{AB} & \frac{-2}{7}S_{AB} & \frac{3}{7}S_{AB} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{5}S_{CD} & \frac{4}{5}S_{CD} & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 & -e \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix} = (-6)(\boldsymbol{j}\frac{3}{7}S_{AB} - \boldsymbol{k}(-\frac{2}{7}S_{AB})) + (-3)(-\boldsymbol{k}(\frac{4}{5}S_{CD})) + (-a)\boldsymbol{j}(-F) =$$

$$\boldsymbol{j}(-\frac{18}{7}S_{AB} + aF) + \boldsymbol{k}(-\frac{12}{7}S_{AB} + \frac{12}{5}S_{CD}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{18}{7}S_{AB} + aF = 0 \\ -\frac{12}{7}S_{AB} + \frac{12}{5}S_{CD} = 0 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$S_{AB} = \frac{7aF}{18},\ S_{CD} = \frac{5aF}{18}$$

Detta ger lösningen på problemet. Observera att vi inte har använt ekvation $(2.6)_1$! Denna ekvation kan användas för att beräkna reaktionskraften $\boldsymbol{R}$. Av $(2.6)_1$ följer nämligen att

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{k}F - \boldsymbol{S}_{AB} - \boldsymbol{S}_{CD} = \boldsymbol{k}F - \boldsymbol{n}_{AB}S_{AB} - \boldsymbol{n}_{CD}S_{CD} = (0,0,F) - \frac{1}{7}(-6,-2,3)\frac{7aF}{18} -$$

$$\frac{1}{5}(-3,4,0)\frac{5aF}{18} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{9},-\frac{1}{6})aF = \boldsymbol{i}\frac{aF}{2} + \boldsymbol{j}(-\frac{aF}{9}) + \boldsymbol{k}(-\frac{aF}{6})$$

Svar: $S_{AB} = \frac{7aF}{18}$, $S_{CD} = \frac{5aF}{18}$.

Sammanfattning (Friläggning)

- Vilken är frågeställningen?
- Frilägg en för frågeställningen lämplig delkropp och rita en frikroppsfigur.
- Beskriv det system av yttre krafter och moment som verkar på delkroppen.
- Ställ upp jämviktsvillkoren.
- Kontrollera antalet ekvationer och antalet obekanta.
- Lös ekvationssystemet, om möjligt.
- Om antalet obekanta är fler än antalet ekvationer tvingas man frilägga ytterligare en delkropp.
- Välj en ny delkropp. Detta bör vara en kropp som står i mekanisk kontakt med den förra.
- Genomför ovanstående punkter för denna delkropp.
- Om nu antalet obekanta och antalet ekvationer överensstämmer kan ekvationssystemet ha en entydig lösning. Om inte så fortsätter man proceduren enligt ovan!

Observera att man under ovanstående process kan komma fram till att de kraftsystem som uppträder är statiskt obestämda. Problemet har då ingen entydig lösning!

Föreläsning 3: Strukturer; fackverk och ramar (4/1-4/6).

Ett **fackverk** (a *truss*) är en mekanisk struktur som består av stela, raka och lätta stänger som förenas i sina ändpunkter med **friktionsfria (glatta) leder**. Fackverket bildar ett sorts skelett som kan ta upp stora laster och på grund av sin utformning kan detta ske med förhållandevis lätta konstruktioner.

Figur 3.1 Fackverksstrukturer.

Fackverk byggs upp av följande element

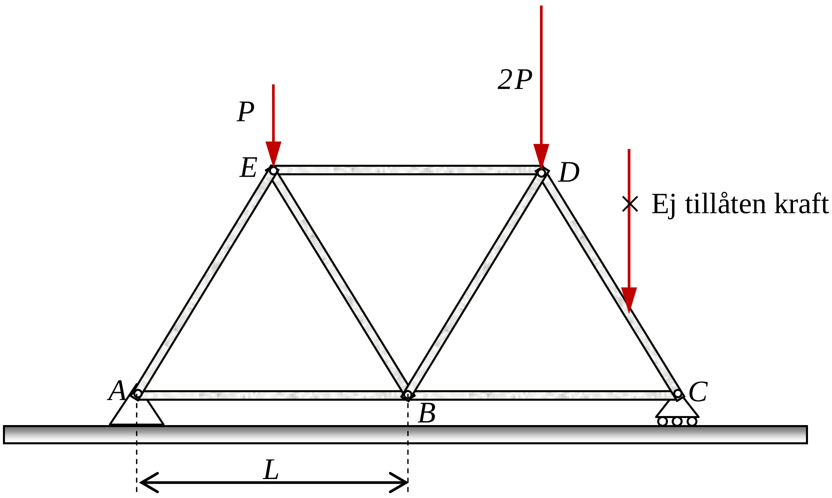
(i) **Raka stångelement** som karakteriseras av sin längd. Man försummar stångelementets massa.

(ii) **Knutpunkter**, som betraktas som punktformiga.

(iii) I knutpunkterna kopplas stångelementen ihop via **glatta leder**.

Belastningen på ett fackverk ges av ett system av yttre krafter bestående av

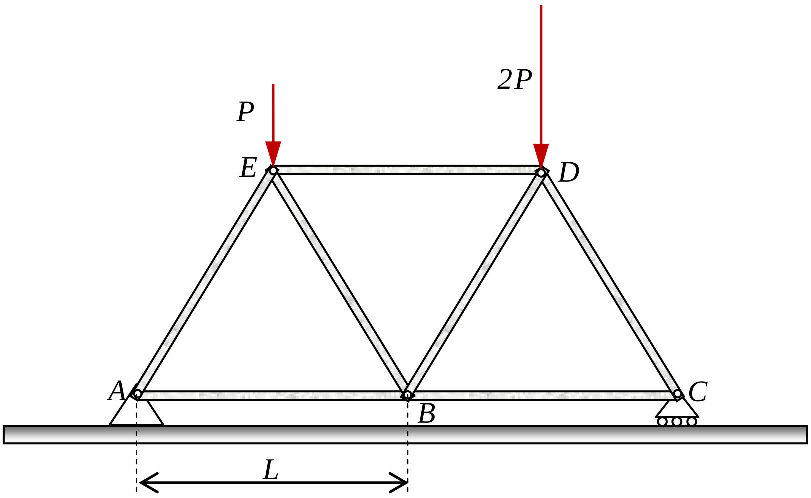
(iv) Punktkrafter som angriper i fackverkets knutpunkter. Inga yttre krafter verkar på stång-elementen.



Figur 3.2 Fackverk.

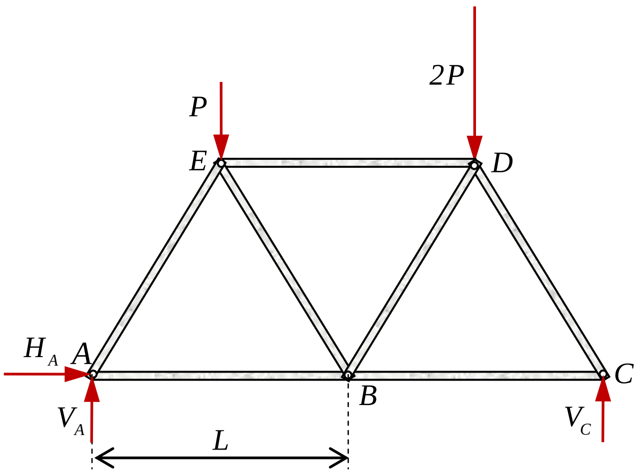
Vi analys av fackverk beräknar man de krafter som verkar på stångelementen. Dessa krafter bildar ett underlag för dimensionering av stångelementen, d v s val av material och val av tvärsnittsgeometri. Krafterna i stängerna skall, med viss säkerhetsmarginal, understiga vissa kritiska värden för att undvika att fackverket kollapsar på grund av t ex knäckning. Mer om detta i kursen i Hållfasthetslära. Krafterna i varje stång måste då beräknas, vilket för stora och komplicerade fackverk kan bli ganska omfattande. Räkne-processen kan dock lätt anpassas för att kunna lösas med hjälp av dator.

Exempel 3.1 Ett fackverk består av sju likadana stänger (stångelement) vardera med längden *L*. Fackverket stöder mot ett fundament enligt nedanstående figur. Fackverket belastas med punktkrafterna $(\boldsymbol{e}_y(-2P), D)$ och $(\boldsymbol{e}_y(-P), E)$. Bestäm krafterna i stängerna *AB*, *AE* och *EB*.



Figur 3.3 Fackverk.

Lösning: Vi börjar med att frilägga *hela fackverket* för att beräkna stödreaktionerna. Inför stödreaktionerna H_A, V_A och V_C enligt figur nedan. Observera att $H_C = 0$ då upplaget vid *C* är glatt (illustrerat i figuren med de små rullarna).



Figur 3.4 Frilagt fackverk.

Jämvikt medför

$$(\rightarrow):\ H_A = 0\,,\ (\uparrow):\ V_A - P - 2P + V_C = 0$$

$$\curvearrowleft A:\ -P\frac{L}{2} - 2P\frac{3L}{2} + V_C 2L = 0$$

Detta ekvationssystem ger stödreaktionerna

$$H_A = 0\,,\ V_A = \frac{5}{4}P\,,\ V_C = \frac{7}{4}P$$

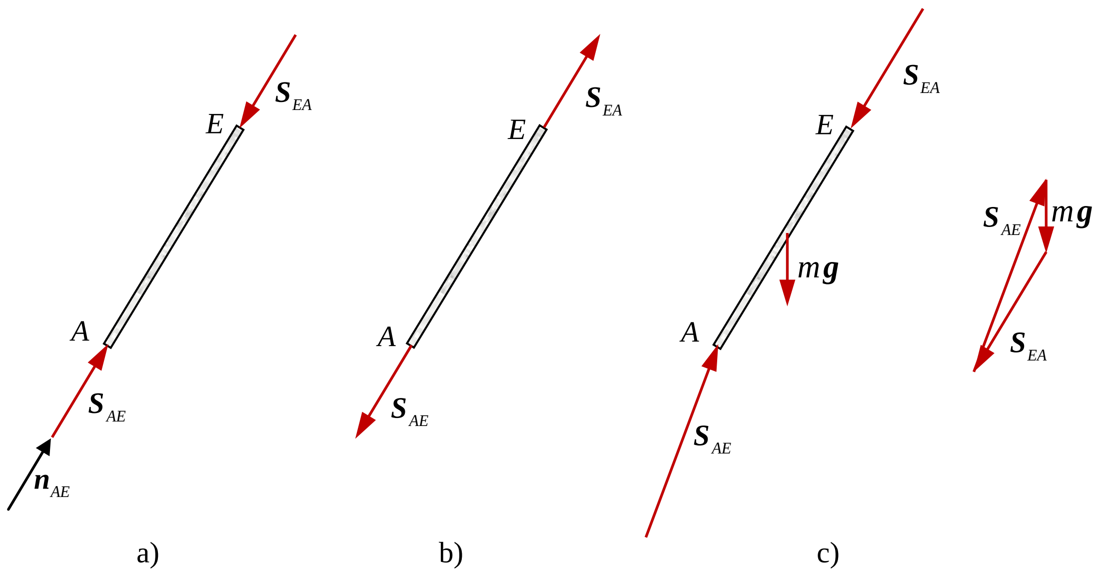
Frilägg en av stängerna, t ex stång *AE*. På denna verkar ett system av yttre krafter som består av två punktkrafter angripande i stångens ändpunkter: $(\boldsymbol{S}_{AE}, A)$, $(\boldsymbol{S}_{EA}, E)$. Observera att *vi försummar tyngdkraften* på stången! Detta är en god approximation eftersom stångkraften i allmänhet är väsentligt större än tyngdkraften, d v s $|\boldsymbol{S}_{AE}| \gg |m\boldsymbol{g}|$ där m är massan hos stången *AE*. Vid jämvikt måste $(\boldsymbol{S}_{AE}, A)$, $(\boldsymbol{S}_{EA}, E)$ utgöra ett nollsystem. För ett nollsystem bestående av två punktkrafter gäller, enligt vad vi tidigare konstaterat (se Figur 1.9), att punktkrafterna har samma verkningslinje och

$$\boldsymbol{S}_{EA} = -\boldsymbol{S}_{AE} \tag{3.1}$$

Vi har således en situation som beskrivs i nedanstående figur. Observera att om vi inte kan försumma tyngkraften så blir problemet väsentligt mera komplicerat. Stångkrafterna kan nu inte längre vara parallella med stången. Se Figur 3.4 c) nedan!

Om vi introducerar enhetsvektorn $\boldsymbol{n}_{AE} = \dfrac{\boldsymbol{r}_{AE}}{L}$, riktad längs stången, kan stångkraften då skriva

$$\boldsymbol{S}_{AE} = \boldsymbol{n}_{AE}(-S_{AE})\,,\ \boldsymbol{S}_{EA} = \boldsymbol{n}_{EA}(-S_{EA}) \tag{3.2}$$

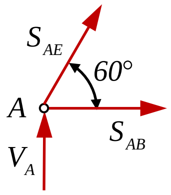


Figur 3.5 Stångelement i jämvikt.

Stångkraften sägs vara *tryckande* om $S_{AE} < 0$ och *dragande* om $S_{AE} > 0$. Av (3.1) och (3.2) följer att

$$\boldsymbol{n}_{EA}(-S_{EA}) = -\boldsymbol{n}_{AE}(-S_{AE}) = \boldsymbol{n}_{EA}(-S_{AE}) \Rightarrow S_{EA} = S_{AE} \tag{3.3}$$

Frilägg nu knutpunkten *A*. De krafter som verkar på knutpunkten är $(-\boldsymbol{S}_{AB}, A) = (\boldsymbol{n}_{AB}S_{AB}, A)$, $(-\boldsymbol{S}_{AE}, A) = (\boldsymbol{n}_{AE}S_{AE}, A)$. Rita in kraftkomponenterna S_{AB} och S_{AE} i frikroppsdiagrammet. Förutom dessa krafter verkar stödreaktionen V_A på knutpunkten. Se nedanstående figur.



Figur 3.6 Frilagd knutpunkt *A*.

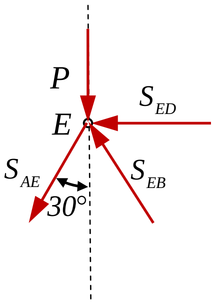
Jämvikt medför

$$(\rightarrow):\ S_{AB} + S_{AE}\cos 60° = 0\ ,\ (\uparrow):\ V_A + S_{AE}\sin 60° = 0 \tag{3.4}$$

Observera att momentekvationen är uppfylld. Med $V_A = \dfrac{5}{4}P$ erhålles, som lösning till ekvationssystemet (3.4),

$$S_{AB} = \frac{5}{4\sqrt{3}}P\ ,\ S_{AE} = -\frac{5}{2\sqrt{3}}P$$

Således, om $P > 0$, så är kraften i stången *AB* dragande och kraften i *AE* tryckande. Frilägg nu knutpunkten *E*. Vi sätter nu ut referensriktningar för stångkrafterna. Observera att kraftkomponenten S_{AE} i Figur 3.7 <u>måste</u> vara motriktad kraftkomponenten S_{AE} i Figur 3.6 enligt lagen om verkan och motverkan. De båda övriga komponenternas riktningar (S_{ED} och S_{EB}) kan väljas godtyckligt, se nedanstående figur. Med dessa referensriktningar betyder t ex $S_{ED} > 0$ tryckande och $S_{EB} < 0$ dragande.



Figur 3.7 Frilagd knutpunkt *E*.

Jämvikt medför:

$$(\rightarrow):\ -S_{AE}\sin 30° - S_{ED}\sin 30° - S_{ED} = 0,\ (\rightarrow):\ S_{AE}\cos 30° + S_{ED}\cos 30° - P = 0$$

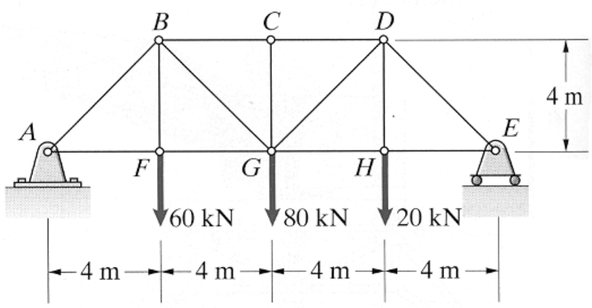
Detta ger, med $S_{AE} = -\frac{5}{2\sqrt{3}}P$,

$$S_{EB} = -\frac{1}{4}P,\ S_{ED} = \frac{1}{4}(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2})P$$

Således, om $P > 0$, så är kraften i stången *EB* dragande och kraften i *ED* tryckande.

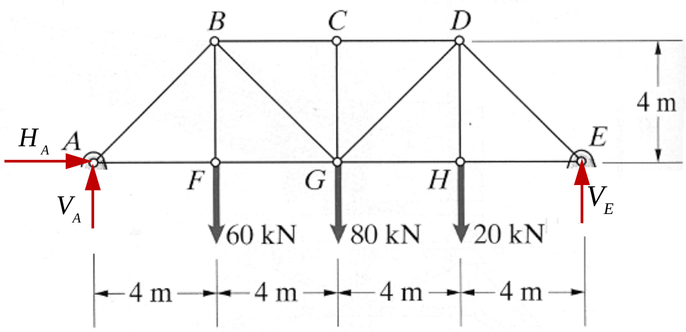
Den metod för beräkning av stångkrafterna som utnyttjats ovan brukar kallas **knutpunktsmetoden** då metoden innebär att man frilägger knutpunkterna. Man kan beräkna samtliga stångkrafter i ett fackverk genom att systematiskt ställa upp jämviktsvillkor för samtliga knutpunkter. Om fackverket är stort med många knutpunkter resulterar detta i ett ekvationssystem med många ekvationer och obekanta.
Vi skall nu demonstrera en annan metod som ibland kan vara att föredra. Den kan, för vissa problem, snabbt leda till en lösning. Denna metod kallas **snittmetoden**.

Exempel 3.2: (Tenta 050824, Uppgift 2). Ett fackverk belastas enligt nedanstående figur. bestäm krafterna i stängerna *CD*, *GD* och *GH*. Stängerna egentyngd kan försummas.



Figur 3.8 Belastat fackverk.

Lösning: Vi börjar med att frilägga hela fackverket. Inför stödreaktionerna H_A, V_A och V_E. Observera att $H_E = 0$ då upplaget vid *E* är **glatt** (försett med rullar).

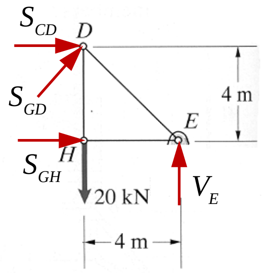


Figur 3.9 Frilagt fackverk.

Jämvikt medför

$$(\rightarrow):\ H_A = 0\,,\ (\uparrow):\ V_A - 60 - 80 - 20 + V_E = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{A}:\ -60 \cdot 4 - 80 \cdot 8 - 20 \cdot 12 + V_E 16 = 0 \tag{3.5}$$

Detta ekvationssystem ger stödreaktionerna: $H_A = 0$, $V_A = 90kN$, $V_E = 70kN$. Vi frilägger nu höger del av fackverket genom att snitta stängerna *CD*, *GD* och *GH*, d v s just de stänger vars stångkrafter efterfrågas. Inför stångkrafterna S_{CD}, S_{GD} och S_{GH}.



Figur 3.10 Frilagd höger del av fackverket.

Jämvikt medför

$$(\rightarrow):\ S_{GH} + S_{GD}\cos 45^\circ + S_{CD} = 0\,,\ (\uparrow):\ -20 + V_E + S_{GD}\sin 45^\circ = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{D}:\ S_{GH} 4 + V_E 4 = 0 \tag{3.6}$$

där $V_E = 70kN$. Detta ekvationssystem ger stödreaktionerna

$$S_{GD} = -70.7kN\,,\ S_{GH} = -70kN\,,\ S_{CD} = 120kN$$

Av detta framgår att krafterna i stängerna *GD* och *GH* är dragande och att kraften i *CD* är tryckande.

Sammanfattning fackverk
Ett fackverk består av raka, lätta stångelement som kopplas samman i sina ändpunkter via friktionsfria leder (knutpunkter). Fackverket belastas med yttre krafter som angriper i knutpunkterna. Ett fackverk kan analyseras med

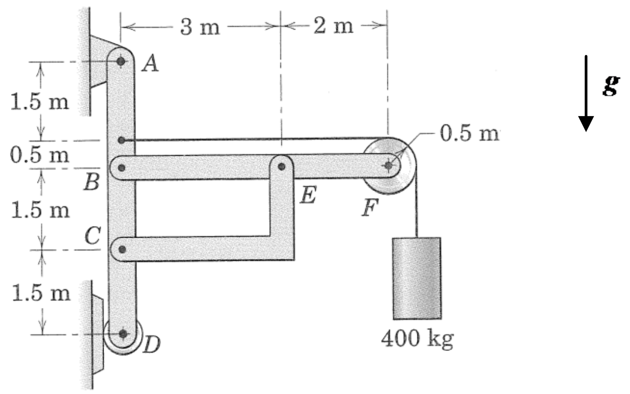
a) Knutpunktsmetoden som innebär
   (i) Friläggning av hela fackverket för bestämning av stödreaktionerna.
   (ii) Friläggning av lämplig knutpunkt (knutpunkter) för bestämning av efterfrågade stångkrafter.
b) Snittmetoden som innebär
   (i) Friläggning av hela fackverket för bestämning av stödreaktionerna.
   (ii) Friläggning av en del av fackverket genom att snitta lämpliga stänger.

Val av kraftkomponenter
När man vid friläggning skall välja referensriktningar för kraftkomponenter så är valfriheten ganska stor. Dock skall man beakta följande:

- Yttre, anbringade krafter bör få samma referensriktningar som anges i förutsättningarna för problemet.
- Reaktionskraftkomponenter kan ges godtyckliga referensriktningar dock bör man vid kontakter med friktion välja normalkraftkomponenten vinkelrät mot kontaktytan och friktionskraftkomponenten vinkelrät mot normalkraften.
- Om två kroppar $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$, är i kontakt och man frilägger $\mathcal{B}_1$ och inför reaktionskraften $\boldsymbol{R}$ från $\mathcal{B}_2$ på $\mathcal{B}_1$. Om man därefter frilägger $\mathcal{B}_2$ så skall man införa reaktionskraften $-\boldsymbol{R}$ från $\mathcal{B}_1$ på $\mathcal{B}_2$, enligt *lagen om verkan och motverkan.*

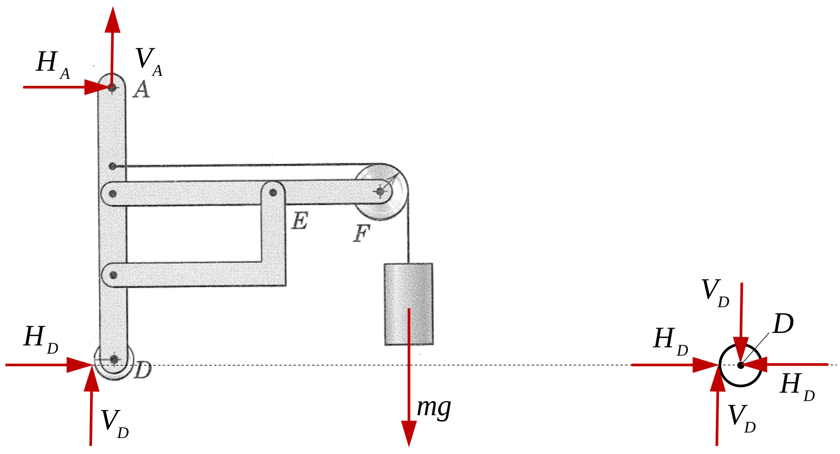
En ett **ramverk** (a *frame*) är en mekanisk struktur som består av stela, lätta, ej nödvändigtvis raka, balkelement som förenas med friktionsfria (glatta) leder. Föreningen behöver ej ske i balkarnas ändpunkter och den yttre lasten är ej nödvändigtvis anbringad i balkarnas ändpunkter. En balk i ett ramverk kan således, till skillnad från en stång i ett fackverk, belastas inne på balkelementet. Ett ramverk är således en något mera komplicerad struktur än ett fackverk.

Exempel 3.3: Ett ramverk, enligt nedanstående figur, belastas med en tyngd med massan $m = 400kg$. Det antas att hjulen vid *D* och *F* är friktionsfritt lagrat på sina axlar. Hjulet vid *F* har radien $r = 0.5m$. Bestäm de krafter som verkar mellan balkelementen i punkterna *A*, *B*, *C*, *D*, *E* och *F*. Tyngdaccelerationen $g = 9.81ms^{-2}$.



Figur 3.11 Belastat ramverk.

Lösning: Vi börjar med att frilägga hela ramverket för bestämning av stödreaktionerna i punkterna *A* och *D*. In för tyngdkraften mg och stödreaktionerna **stödreaktionerna:** H_A, V_A och H_D, V_D. Vi frilägger samtidigt hjulet vid *D* för att bestämma kraftkomponenten V_D. Denna analys ger en förklaring till varför tangentiella kraftkomponenter vid hjulförsedda stöd kan sättas till noll.



Figur 3.12 Frilagt ramverk.

Jämvikt för hjulet medför (a är hjulets radie)

$$\curvearrowleft D:\ -V_D a = 0 \Rightarrow V_D = 0$$

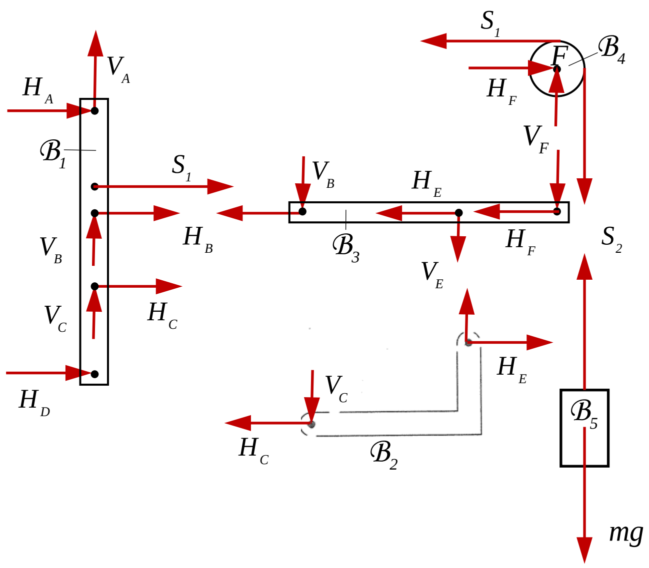
Jämvikt för ramverket (med $V_D = 0$, $H_D \geq 0$):

$$(\rightarrow):\ H_A + H_D = 0,\ (\uparrow):\ V_A - mg = 0,\quad \curvearrowleft A:\ H_D 5 - mg 5.5 = 0$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$H_D = 4.32kN,\ H_A = -4.32kN,\ V_A = 3.92kN$$

Vi frilägger nu ramverkets fem delar. $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_4$ och $\mathcal{B}_5$. Se figur nedan!



Figur 3.13 Frilagda delar i ramverket.

Vi inför reaktionskrafter H_B, V_B, H_C, V_C, H_E, V_E, H_F, V_F och spännkraften i linan S_1 och S_2. (med $S_1, S_2 \geq 0$). Jämvikt för delkropp $\mathcal{B}_1$ medför:

$$(\rightarrow):\ H_A + S_1 + H_B + H_C + H_D = 0\ ,\ (\uparrow):\ V_A + V_B + V_C = 0$$

$$\curvearrowleft B:\ H_D \cdot 3 + H_C \cdot 1.5 - S_1 \cdot 0.5 - H_A \cdot 2 = 0$$

Jämvikt för delkropp $\mathcal{B}_2$ medför:

$$(\rightarrow):\ -H_C + H_E = 0\ ,\ (\uparrow):\ -V_C + V_E = 0\ ,\quad \curvearrowleft C:\ -H_E \cdot 1.5 + V_E \cdot 3 = 0$$

Jämvikt för delkropp $\mathcal{B}_3$ medför:

$$(\rightarrow):\ -H_B - H_E - H_F = 0\ ,\ (\uparrow):\ -V_B - V_E - V_F = 0\ ,\quad \curvearrowleft E:\ V_B \cdot 3 - V_F \cdot 2 = 0$$

Jämvikt för delkropp $\mathcal{B}_4$ medför:

$$(\rightarrow):\ -S_1 + H_F = 0\ ,\ (\uparrow):\ V_F - S_2 = 0\ ,\quad \curvearrowleft F:\ S_1 \cdot 0.5 - S_2 \cdot 0.5 = 0$$

Jämvikt för delkropp $\mathcal{B}_5$ medför:

$$(\uparrow):\ S_2 - mg = 0$$

De båda övriga jämviktsekvationerna är identisk uppfyllda för denna delkropp. Sammanfattningsvis har vi således tio obekanta och hela tretton ekvationer. Om vi använder ekvationerna som hör till friläggningen av delkropparna $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_4$ och $\mathcal{B}_5$ så erhåller man ett ekvationssystem med 10 ekvationer. Detta har en entydig lösning, nämligen:

$H_B = 9.15kN$, $V_B = 2.62kN$, $H_C = -13.08kN$, $V_C = -6.54kN$, $H_E = -13.08kN$, $V_E = -6.54kN$, $H_F = 3.92kN$, $V_F = 3.92kN$ och $S_1 = S_2 = 3.92kN$

Man kan nu använda ekvationerna för kropp $\mathcal{B}_3$ som ett test på att man räknat rätt. Man kontrollerar att med ovanstående lösning så är jämviktsekvationerna för kropp $\mathcal{B}_3$ uppfyllda.

Sammanfattning ramverk
En ett ramverk består av stela, lätta, ej nödvändigtvis raka, balkelement som förenas med friktionsfria (glatta) leder. Föreningen behöver ej ske i balkarnas ändpunkter och den yttre lasten är ej nödvändigtvis anbringad i balkarnas ändpunkter. Ett ramverk analyseras genom

(i) Friläggning av hela fackverket för bestämning av stödreaktionerna.
(ii) Friläggning av delkroppar för bestämning av inre reaktionskrafter.
(iii) Lösning av jämviktsekvationerna.
(iv) Kontroll av lösningen till ekvationssystemet. Utförs på den ’sista delkroppen’.