LUND UNIVERSITY
Mekanik, LTH

Deltentamen 3 i Mekanik, GK för I

Måndagen den 5 mars 2012, kl. 14-16

Namn(texta):......Lösningar......

Namn(signatur)..

ÅRSKURS **I**:......

Personnr:....................................

Skrivningen består av 3 uppgifter. **Kontrollera att alla uppgifterna är med i häftet!** Lösningarna till uppgifterna skall **renskrivas** och redovisas på utrymmet under respektive uppgift. Använd även utrymmet på baksidan av pappret, om det är nödvändigt. Införda storheter och beteckningar skall definieras (och ev. markeras i en tydlig figur). Uppställda ekvationer motiveras. **Kraft- och momentekvationer** skall motiveras med hjälp av en redovisad **friläggning**. Räkningarna skall redovisas i den omfattning att de lätt kan följas.

Tillåtna hjälpmedel: Utdelade Formelsamlingar i Mekanik samt miniräknare.

Sammanställning av skrivresultat:

Uppgift	Kommentar/bedömning	Poäng(0-5)
1		
2		
3		
	Summa	
	Betyg	

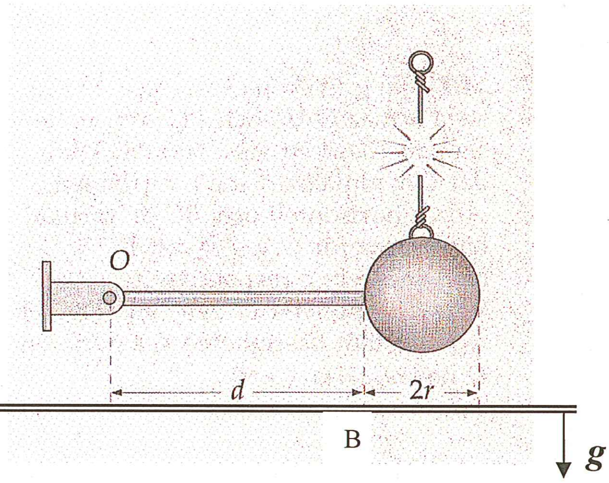
Leg:......

Term.räkn:

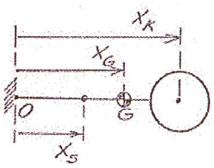
1. En fysisk pendel består av en homogen rak stång med längden d och massan m fast förenad med ett homogent klot med radien r och massan m enligt figuren. Stången är friktionsfritt lagrad genom en horisontell, fix axel i O. Pendeln hänger i en tråd i ett horisontellt läge då tråden plötsligt går av. Bestäm:

a) masscentrumsläget för pendeln samt tröghetsmomentet för pendeln med avseende på axeln genom O.

b) reaktionskraften på pendeln i upphängningspunkten O omedelbart efter det att tråden gått av. Tyngdaccelerationen $g = |\mathbf{g}|$



5.

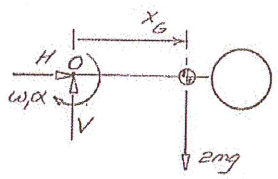


a) Pendeln är sammansatt av stången med masscentrumsläge $x_S = \frac{d}{2}$ och klotet med masscentrumsläget $x_K = d+r$

Pendelns masscentrum G har då läget: $x_G = \frac{1}{2m}(mx_S + mx_K) = \frac{1}{2}\left(\frac{3d}{2}+r\right)$

Pendelns tröghetsmoment $I_O = \frac{1}{3}md^2 + \frac{2mr^2}{5} + m(d+r)^2$

b) Frilägg pendeln. Inför reaktionskraftens komponenter H, V enligt figuren! Låt ω och α beteckna



pendelns vinkelhastighet och vinkelacceleration, respektive, i det ögonblick då tråden går av. Då gäller att $\omega = 0$ och

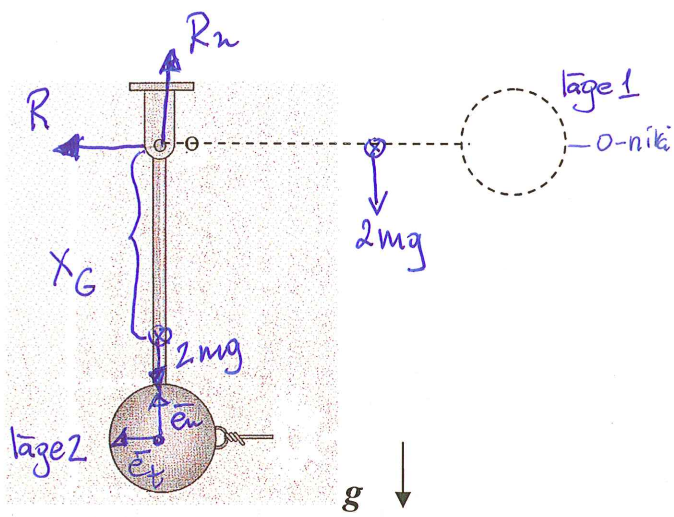
$(\rightarrow)$: $H = -2mx_G\omega^2 = 0$ (1)

$(\downarrow)$: $-V + 2mg = 2mx_G\alpha$ (2)

$\overset{\curvearrowright}{O}$: $2mgx_G = I_O\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2mgx_G}{I_O}$ (3)

(2) & (3) $\Rightarrow$ $V = 2mg\left(1 - \frac{2mx_G^2}{I_O}\right) = 2mg\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3d}{2}+r\right)^2}{\frac{1}{3}d^2 + \frac{2r^2}{5} + (d+r)^2}\right)$

2. Betrakta samma fysiska pendel som i uppgift 1. Den består av en homogen rak stång med längden d och massan m fast förenad med ett homogent klot med radien r och massan m enligt figuren. Stången är friktionsfritt lagrad genom en horisontell, fix axel i O. Pendeln hänger i en tråd i ett horisontellt läge då tråden plötsligt går av.
Bestäm reaktionskraften på pendeln i upphängningspunkten O när klotet är längs ner.
Tyngdaccelerationen är $g = 9.82\,ms^{-2}$.



Energilagen ger: Läge 1: $T_1 = 0$

$V_1 = 0$

Läge 2: $T_2 = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$

$V_2 = -2mg X_G$

$$\Rightarrow \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 - 2mg X_G \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{4mg X_G}{I_O} \qquad (*)$$

Frilägg! Momentekvation: $M_O = I_O \ddot{\theta}$

$$0 = I_O \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

Kraftekvationer: t-led: $R_t = 2m X_G \overset{=0}{\ddot{\theta}} = 0$

n-led: $R_n - 2mg = 2m X_G \dot{\theta}^2$

Insättning av $\dot{\theta}^2$ från (*) ger:

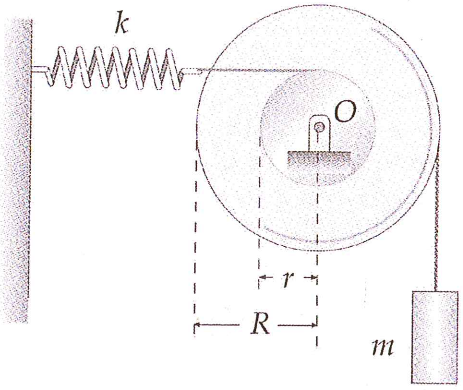
$$\Rightarrow R_n = 2m\Big(X_G \underbrace{\frac{4mgX_G}{I_O}}_{\dot{\theta}^2} + g\Big)$$

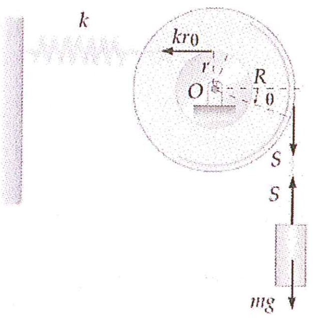
$$R_n = 2mg\left(\frac{4mX_G^2}{I_O} + 1\right)$$

med I_O och X_G från uppg. 1.

Svar: $R_t = 0$, $R_n = 2mg\left(\frac{4mX_G^2}{I_O} + 1\right)$

3. Två hjul med radierna r och R är stelt förenade och roterar som en kropp kring en glatt horisontell axel O. Hela kroppens massa är M och tröghetsmomentet med avseende på rotationsaxeln är I. En tråd är upplindad på det mindre hjulet och är med en horisontell fjäder med fjäderkonstanten k förenad med en vägg. På det stora hjulet är också en tråd upplindad och uppbär en tyngd med massa m. Bestäm svängningstiden för systemet för små svängningar kring det stabila jämviktsläget.





Frilägg hjulet och tyngden. Låt θ vara hjulets vridningsvinkel så att $\theta = 0$ då fjädern har sin naturliga längd. Momentekvationen $M_z = \dot{H}_z$ för hjulet med avseende på rotationsaxeln ger

$$O: \quad S \cdot R - kr\theta \cdot r = I\ddot{\theta} \qquad (1)$$

För tyngden skriver vi upp kraftekvationen

$$\downarrow: \quad mg - S = m\ddot{x} \qquad (2)$$

Tyngdens hastighet $\dot{x}$ är lika stor som hastigheten $R\dot{\theta}$ för en punkt på hjulets periferi. Tidsderivering ger

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Insättning i (2) ger

$$mg - S = mR\ddot{\theta} \qquad (2')$$

Eliminera nu trådkraften S genom att dividera ekv (1) med R och addera ekv (2)!

$$mg - \frac{kr^2}{R}\theta = \left(mR + \frac{I}{R}\right)\ddot{\theta} \qquad (4)$$

Förenkling ger

$$\left(mR^2 + I\right)\ddot{\theta} + kr^2\theta = mgR \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{kr^2}{I + mR^2}\theta = \frac{mgR}{I + mR^2} \qquad (5)$$

Jämför denna ekvation med ekvationen för en harmonisk svängningsrörelse:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \text{konstant}.$$

Identifiering ger vinkelfrekvensen ω_n och svängningstiden

$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{I + mR^2}{kr^2}}$$