FORMELSAMLING

Statik

Kraftmoment med avseende på en punkt: $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{F}$

Kraftmoment med avseende på en axel: $M_\lambda = \mathbf{M_A} \cdot \mathbf{e}_\lambda = (\mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_\lambda$

Sambandsformeln: $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$

Två kraftsystem är ekvimomenta om: $(\sum \mathbf{F}_k)_1 = (\sum \mathbf{F}_k)_2$ samt $(\mathbf{M}_P)_1 = (\mathbf{M}_P)_2$, för någon punkt P

Kraftresultant existerar om: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_P = 0$ förutsatt att $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$

Masscentrum: $\mathbf{r}_G = \dfrac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{\sum m_k}$; $\mathbf{r}_G = \dfrac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}$

Nödvändigt villkor för jämvikt: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; $\mathbf{M} = \mathbf{0}$

Friktionsvillkor: $\dfrac{|\mathbf{f}|}{|\mathbf{N}|} \leq \mu$

Virtuellt arbete: $\delta U = \sum \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$ i jämviktsläget

Partikelns dynamik

Hastighet:

- kartesiskt $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$
- naturligt $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t$
- cylinder $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$

Acceleration:

- kartesiskt $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z$
- naturligt $\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$
- cylinder $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Kraftekvationen (Newtons andra lag): $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ eller $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $U = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Kinetisk energi:	$T = \frac{1}{2} m v^2$
Lagen om effekten:	$P = \dot{T}$
Lagen om arbetet:	$U = T_2 - T_1$
Potentiell energi:	$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$
Mekaniska energilagen:	$E = T + V = T_0 + V_0$
Impulslagen:	$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}(t) - m\mathbf{v}(t_0)$
Studstalet:	$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$
Rörelsemängdsmoment:	$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
Momentekvationen:	$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, där O är en fix punkt
För centralkraftsrörelse gäller:	Bankurvan är plan Sektorhastigheten $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ är konstant
För Keplerrörelse gäller också:	Mekaniska energin är konstant
Fri odämpad svängning:	$\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$
svängningstid	$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$
Fri dämpad svängning:	$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$
svängningstid	$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
Påtvingad dämpad svängning:	$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n{}^2 x = (F_0/m) \sin \omega t$
amplitud	$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2}}$
Kinetiska energins två delar:	$T = \frac{1}{2} m v_G{}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_{k\mathrm{rel}}{}^2$
Steiners sats för tröghetsmoment:	$I = I_G + md^2$

FORMELSAMLING

Partikelsystemets kinetik

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = \sum m_k \mathbf{v}_k = m\mathbf{v}_G$

Kraftekvationen (Eulers första lag): $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ eller $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $U = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Lagen om effekten: $P = \dot{T}$

Lagen om kinetiska energin: $U = T_2 - T_1$

Kinetiska energins två delar: $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum \frac{1}{2} m_k \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^2$

För konservativa krafter gäller

Potentiell energi: $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_o}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$

$U = V_1 - V_2$

Mekaniska energilagen: $E = T + V = T_0 + V_0$

Rörelsemängdsmoment: $\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k$

$\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_k \times m_k \mathbf{v}_k$

Rörelsemängdsmomentets två delar: $\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_{Grel} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{v}_G$

Samband mellan det absoluta och det relativa rörelsemängdsmomentet: $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_{Grel}$

$\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_{Prel} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{v}_P$

Momentekvationen (Eulers andra lag)

fix punkt: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$

masscentrum: $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$

en godtycklig rörlig punkt $\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_G$

$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G$

$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{Prel} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_P$

För system med in- och utströmmande materia gäller

Raketekvationen: $\mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}}$

Turbinekvationen: $\mathbf{M} + \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_i - \mathbf{r}_u \times q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{H}}$

med bivillkor $\frac{dm}{dt} = q_i - q_u$

Stela kroppens plana kinematik

För rotationsrörelse gäller

hastigheten: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

accelerationen: $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$

Allmänt gäller

Sambandsformeln för hastigheter:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$$

Sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{BA}$$

Rörelse relativt roterande referenssystem

Transformation av en tidsderivata:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

hastighet

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{rel} \\ &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{v}_{rel}\end{aligned}$$

acceleration

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_{cor} + \mathbf{a}_{rel} \\ &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}\end{aligned}$$

Stela kroppens plana kinetik

Tröghetsmoment

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$
$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$$

Tröghetsradie

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Sats om tunn skiva: $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

Steiners sats: $I_{zz} = I_{zz}^G + md^2$

Tröghetsprodukt: $I_{xy} = \int xy \mathrm{d}m$

Steiners sats för tröghetsprodukt: $I_{xz}^P = I_{xz}^G + mx_G z_G$

Stela kroppens plana kinetik (fortsättning)

Kraftekvationen: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$

Momentekvationen

fix punkt: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$

masscentrum: $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$

en godtycklig rörlig punkt
$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_G$$
$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G$$
$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{P}rel} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_P$$

Rörelsemängdsmomentet för en fix punkt eller masscentrum:
$$\mathbf{H} = -I_{xz}\dot{\theta}\mathbf{e}_x - I_{yz}\dot{\theta}\mathbf{e}_y + I_{zz}\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$

Kinetiska energins två delar:
$$T = \frac{1}{2}mv_G{}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

C momentancentrum
$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Rotation kring fix axel
$$T = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Effekt:
$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G + \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Lagen om effekten: $P = \dot{T}$

Lagen om kinetiska energin: $U = T_2 - T_1$

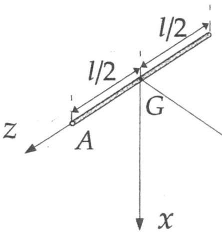
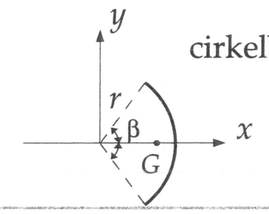
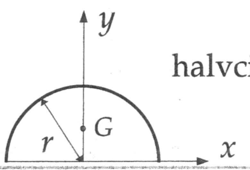
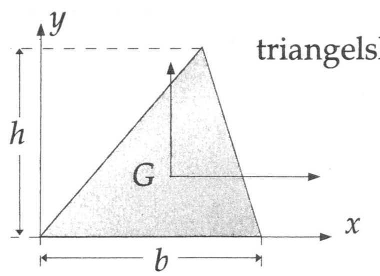
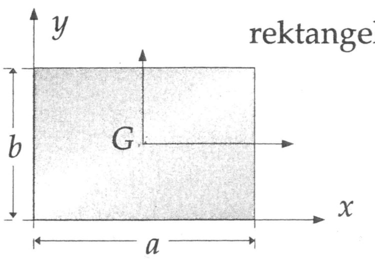
För konservativa krafter gäller

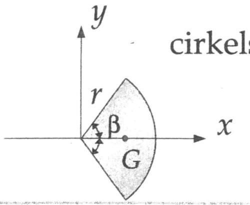
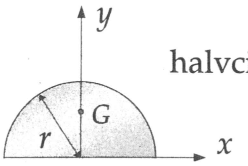
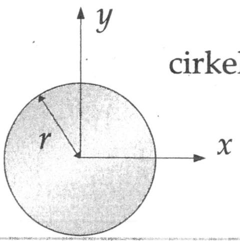
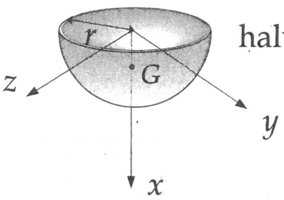
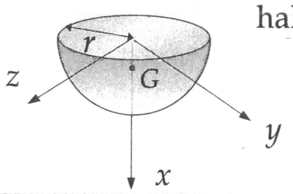
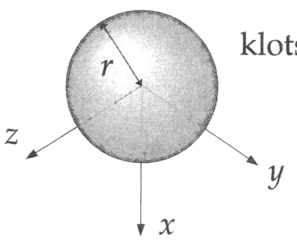
Mekaniska energilagen: $E = T + V = T_0 + V_0$

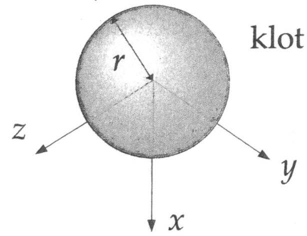
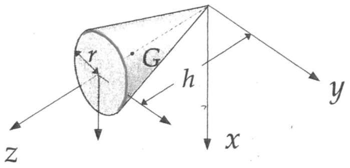
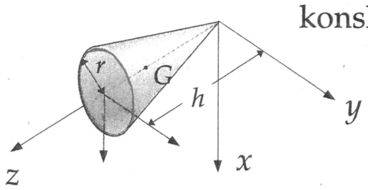
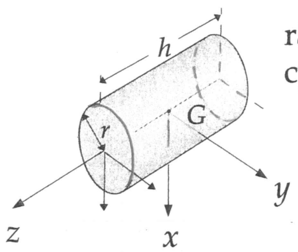
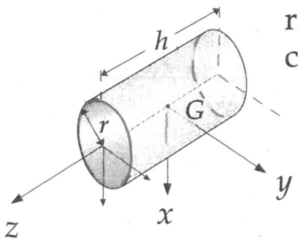
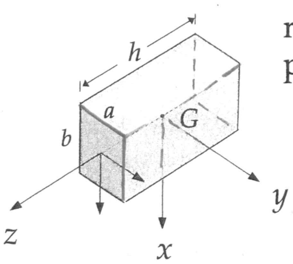
Momentekvationen
$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t}\right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$$

Tröghetsmoment och masscentrum för enkla homogena kroppar

Steiners sats: Tröghetsmomentet med avseende på en axel på avståndet d från en axel genom masscentrum G bestäms enligt: $I_x = I_x^G + md^2$

	masscentrum, area, volym	tröghetsmoment
 smal stång	-----	$I_x^G = \frac{ml^2}{12}$ $I_x^A = \frac{ml^2}{3}$
 cirkelbåge	$x_G = \frac{\sin\beta}{\beta} r$	-----
 halvcirkelbåge	$y_G = \frac{2r}{\pi}$	-----
 triangelskiva	$y_G = \frac{h}{3}$ $\text{Area} = \frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{mh^2}{6}$ $I_x^G = \frac{mh^2}{18}$
 rektangelskiva		$I_x = \frac{mb^2}{3}; \quad I_y = \frac{ma^2}{3}$ $I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$ $I_x^G = \frac{mb^2}{12}$

 cirkelsektorskiva	$x_G = \frac{2}{3}\frac{\sin\beta}{\beta}r$ $\text{Area} = \frac{1}{2}2\beta r^2$	$I_x = \frac{mr^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\beta}{2\beta}\right)$ $I_z = \frac{mr^2}{2}$
 halvcirkelskiva	$y_G = \frac{4r}{3\pi}$ $\text{Area} = \frac{1}{2}\pi r^2$	$I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$ $I_z = \frac{mr^2}{2}$
 cirkelskiva	$\text{Area} = \pi r^2$	$I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$ $I_z = \frac{mr^2}{2}$
 halvklotskal	$x_G = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2mr^2}{3}$
 halvklot	$x_G = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2mr^2}{5}$
 klotskal	$\text{Area} = 4\pi r^2$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2mr^2}{3}$

 klot	Volym $= \dfrac{4\pi r^3}{3}$	$I_x = I_y = I_z = \dfrac{2mr^2}{5}$
 rät cirkulär kon	$z_G = \dfrac{3h}{4}$ Volym $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$	$I_y = \dfrac{3mr^2}{20} + \dfrac{3mh^2}{5}$ $I_z = \dfrac{3mr^2}{10}$
 rät cirkulärt konskal	$z_G = \dfrac{2h}{3}$	$I_y = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{mh^2}{2}$ $I_z = \dfrac{mr^2}{2}$
 rät cirkulär cylinder	Volym $= \pi r^2 h$	$I_x^G = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{mh^2}{12}$ $I_z^G = \dfrac{mr^2}{2}$
 rät cirkulärt cylinderskal	Area $= 2\pi rh$	$I_x^G = \dfrac{mr^2}{2} + \dfrac{mh^2}{12}$ $I_z^G = mr^2$
 rektangulär parallellepiped	Volym $= abh$	$I_x^G = \dfrac{m}{12}(a^2 + h^2)$ $I_y^G = \dfrac{m}{12}(b^2 + h^2)$ $I_z^G = \dfrac{m}{12}(a^2 + b^2)$