

Balkar

Balkar är strukturer som uppvisar motstånd mot böjning då de utsätts för yttre krafter och moment.

En analys av en balks bärande förmåga kan delas upp i flera delar:

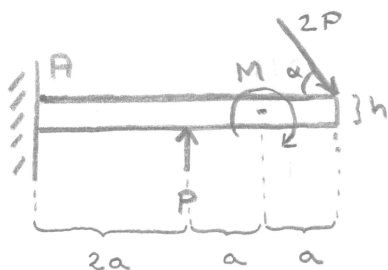
- Analys av yttre krafter och moment på balken.
- Analys av inre krafter och moment i balken.
- Analys av balkens deformation i förhållande till påverkan från krafter och moment.

Här kommer de två första punkterna att studeras.

Yttre krafter och moment

När yttre krafter och moment studeras frilägg hela balken. Kraft- och momentekvationer ställs upp, där dessa innefattar samtliga yttre laster, samt reaktionskrafter och reaktionsmoment vid infästningarna.

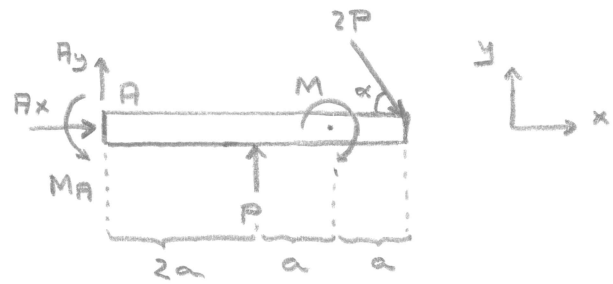
Exempel 1:



En balk med försumbar massa i förhållande till den yttre lasten har längden $4a$ och belastas med två krafter P och $2P$, samt ett moment M enligt figur. Bestäm reaktionskrafterna verkande på balken i A . Försumma balkens tjocklek h .

Lösning:

• Frilägg balken:



• Kraft- och momentjämvikt:

$$\begin{aligned} 1) \sum F_x = 0 & \quad A_x + 2P \cos \alpha = 0 & \Rightarrow A_x = -2P \cos \alpha \\ 2) \sum F_y = 0 & \quad A_y - 2P \sin \alpha + P = 0 & \Rightarrow A_y = P(2 \sin \alpha - 1) \\ 3) \sum \hat{A} = 0 & \quad M_A - M + 2a \cdot P - 4a \cdot 2P \sin \alpha = 0 & \Rightarrow M_A = 2P(4 \sin \alpha - 1)a + M \end{aligned}$$

Svar: $A_x = -2P \cos \alpha$, $A_y = P(2 \sin \alpha - 1)$, $M_A = 2P(4 \sin \alpha - 1)a + M$

En balk kan även belastas av utbredda laster. Låt x beteckna en längdkoordinat längs balken och inför $w = w(x)$ som anger last per längdenhet för koordinaten x . Då kan ett lastinkrement dR skrivas som

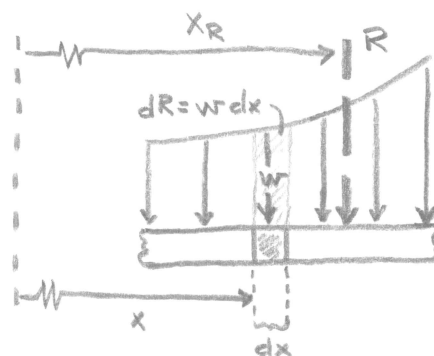
$$dR = w(x) dx$$

Den totala kraften R ges av

$$R = \int w(x) dx$$

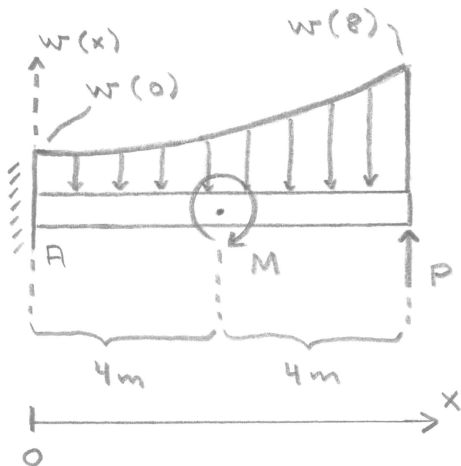
Placeringen av kraftresultanten ges av momentprincipen:

$$x_R R = \int x w(x) dx \quad \text{eller} \quad x_R = \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx}$$



När den utbredda lastens resultant R , samt resultantens placering x_R , har beräknats, kan de yttre reaktionskrafterna och reaktionsmomenten bestämmas genom att ställa upp kraft- och momentekvationer för den frilagda balken.

Exempel 2:



En balk med försumbar massa i förhållande till yttre laster har längden 8m. Den belastas med ett moment $M=20\text{ kNm}$, en kraft $P=5\text{ kN}$ och en utbredd last $w(x)$. Den utbredda lasten beskrivs enligt

$$w(x) = w(0) + kx^3$$

där $w(0)=1\text{ kN/m}$ och $k=2\text{ N/m}^4$.

Bestäm reaktionskrafterna verkande på balken i A.

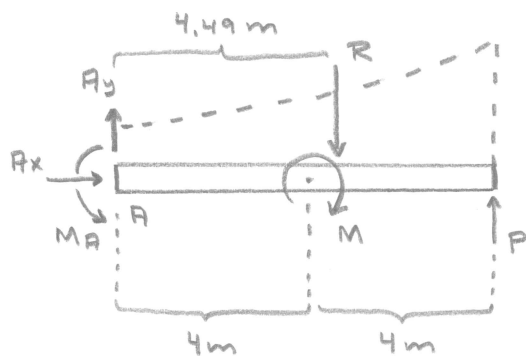
Lösning:

• Beräkna kraftresultanten R :
$$R = \int_0^8 (1000 + 2x^3) dx = \left[1000x + \frac{2x^4}{4} \right]_0^8 = 10048 \text{ [N]}$$

• Beräkna kraftresultantens placering x_R :

$$x_R = \frac{\int_0^8 x(1000 + 2x^3) dx}{10048} = \frac{\left[\frac{1000x^2}{2} + \frac{2x^5}{5} \right]_0^8}{10048} = 4,49 \text{ [m]}$$

- Frilägg balken:



$$R = 10048 \text{ N}$$

$$P = 5000 \text{ N}$$

$$M = 20000 \text{ Nm}$$

- Kraft- och momentjämvikt:

$$1) \quad \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 0 \text{ N}$$

$$2) \quad \sum F_y = 0 \quad A_y - R + P = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 5048 \text{ N}$$

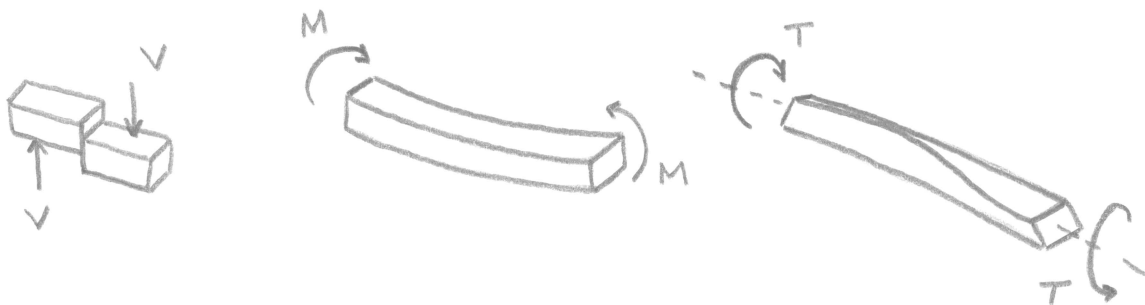
$$3) \quad \sum \hat{A} = 0 \quad P \cdot 8 - R \cdot 4.49 + M - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 14884 \text{ Nm}$$

Svar: $A_x = 0 \text{ N}$, $A_y = 5048 \text{ N}$, $M_A = 14884 \text{ N}$

Inre krafter och moment

Förutom att upprisa motstånd mot dragkraft och tryckkraft, kan en balk upprisa motstånd mot skjuvning, böjning och torsion.

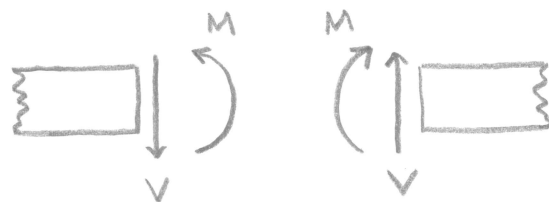


V : skjuvkraft

M : böjmoment

T : torsionsmoment / vridmoment

Här kommer skjuvkraft V och böjmoment M att behandlas. Den vedertagna konventionen för positiv riktning på V och M framgår av nedanstående figur.



Variationen av V och M längs med balken ger nödvändig information för designanalys av balken. Till exempel är det maximala böjmomentet viktigt att ta hänsyn till, både dess storlek och placering. En tydlig metod att redovisa variationen av V och M är att rita skjuvkrafts- och böjmomentendiagram där V och M ritas som funktioner av position längs balkens längdriktning.

Tillvägagångssätt för att bestämma V och M :

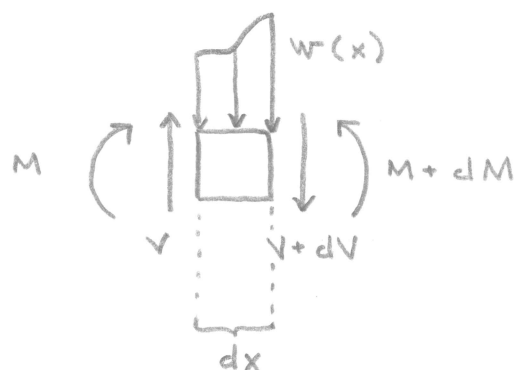
- Frilägg hela balken
- Använd kraft- och momentekvationer för att bestämma yttre reaktionskrafter och moment vid balkens infästningar.
- Gör ett snitt någonstans längs med balken och frilägg vänster- respektive högersidan av balken. Låt V och M anta positiv riktning enligt ovan nämnd konvention.
- Välj vänster eller höger sida av balken och sätt upp kraft- och momentekvationer för att ta fram uttryck för V och M som funktioner av positionen längs med balken.

Observera: Undvik att införa snitt precis där en punktkraft eller ett punktmoment verkar.

Hantering av utbredda laster:

Det är möjligt att formulera generella uttryck för förhållandet mellan utbredda laster och skjuvkraft V , respektive böjmoment M .

Betrakta ett längdelement dx som utsätts för lasten $w(x)$.
Friläggning med V och M enligt positiv konvention:



Om dx väljes tillräckligt litet, kan $w(x)$ betraktas som konstant i intervallet.

Kraftjämvikt ger: $V - w(x)dx - [V + dV] = 0$

$$\Rightarrow w(x) = - \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_{V(x_0)}^V dV = - \int_{x_0}^x w(x) dx$$

vilket innebär:

V = skjuvkraften vid x_0 - arean under lastkurvan från x_0 till x .

Momentjämvikt ger:

$$M + w(x) dx \cdot \frac{dx}{2} + (V + dV) \cdot dx - (M + dM) = 0$$

Om differentier av högre ordning strykes:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_{M(x_0)}^M dM = \int_{x_0}^x V dx$$

vilket innebär:

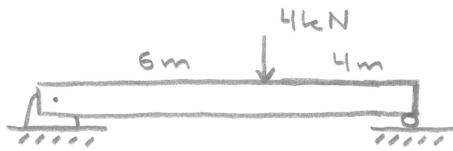
M = böjmomentet vid x_0 + arean under skjuvkraftsdiagrammet från x_0 till x .

Kombineras uttrycken i kraftjämvikten och momentjämvikten erhålls:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -w(x)$$

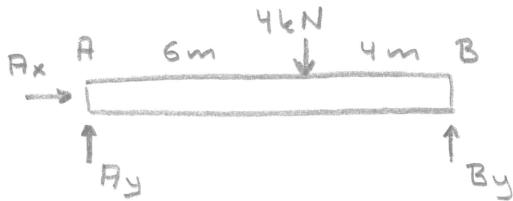
Om den utbredda lasten w är en känd funktion av x kan skjuvkraften erhållas genom att integrera $w(x)$ en gång. Under samma förutsättningar kan $w(x)$ integreras två gånger för bestämning av böjmomentet. Observera tecknen.

Exempel 3:



Balkens massa kan försummas i förhållande till den yttre lasten. Rita upp skjurfkrafts- och böjmomentssdiagrammet.

- Frilägg hela balken:

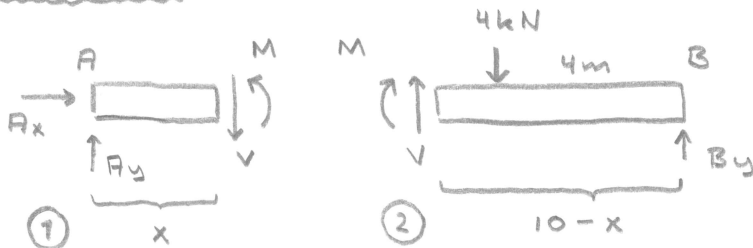


- Kraft- och momentjämvikt:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \sum F_x = 0 & A_x = 0 \\
 2) \quad \sum F_y = 0 & A_y + B_y - 4 = 0 \\
 3) \quad \sum \bar{A} = 0 & B_y \cdot 10 - 4 \cdot 6 = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array}} \right\} \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 A_x = 0 \text{ kN} \\
 A_y = 1,6 \text{ kN} \\
 B_y = 2,4 \text{ kN}
 \end{array}$$

- Snitt till vänster om "4kN":

$0 < x < 6\text{m}$



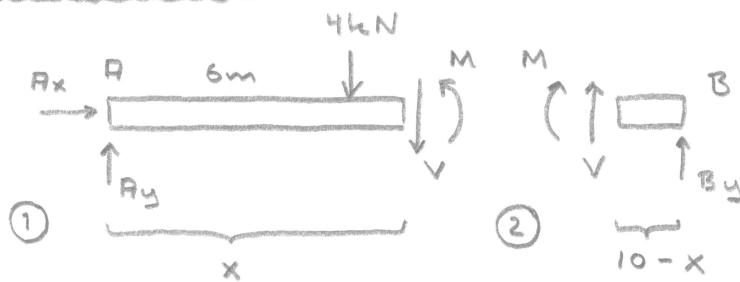
Välj någon av delarna och studera jämvikt (eller båda för att jämföra resultat).

$$\begin{array}{ll}
 \textcircled{1} \quad \sum F_y = 0 & A_y - V(x) = 0 \\
 \sum \bar{A} = 0 & -V(x) \cdot x + M(x) = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}} \right\} \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 V(x) = 1,6 \text{ kN} \\
 M(x) = 1,6 \cdot x \text{ kNm}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \textcircled{2} \quad \sum F_y = 0 & V(x) - 4 + B_y = 0 \\
 \sum \bar{B} = 0 & -V(x) \cdot (10-x) + 4 \cdot 4 - M(x) = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array}} \right\} \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 V(x) = 1,6 \text{ kN} \\
 M(x) = 1,6 \cdot x \text{ kNm}
 \end{array}$$

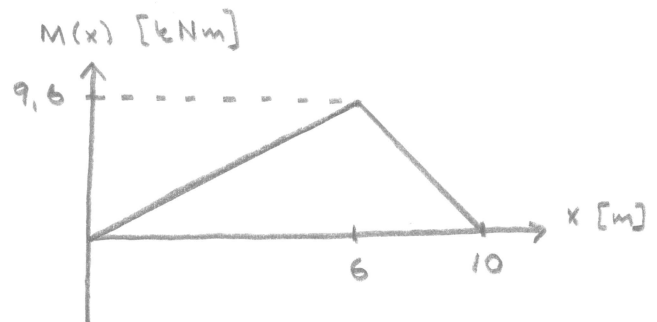
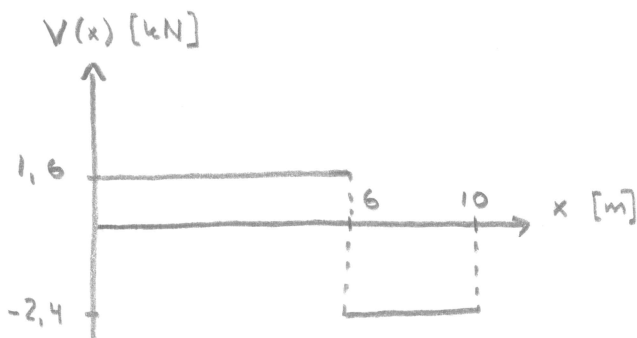
• Snitt till höger om "4 kN":

$$6\text{ m} < x < 10\text{ m}$$

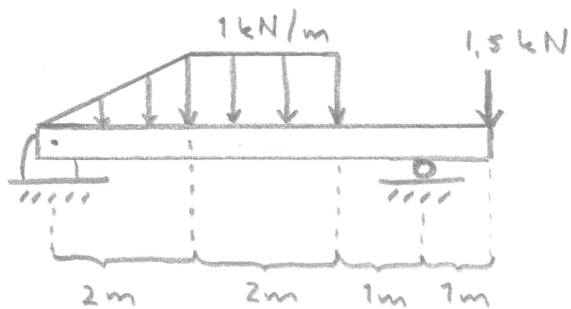


$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \sum F_y = 0 \quad A_y - 4 - V(x) = 0 \\ \sum \vec{A} = 0 \quad -4 \cdot 6 - V(x) \cdot x + M(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V(x) = -2,4 \text{ kN} \\ M(x) = 2,4(10-x) \text{ kNm} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{2} \quad \sum F_y = 0 \quad V(x) + B_y = 0 \\ \sum \vec{B} = 0 \quad -V(x) \cdot (10-x) - M(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V(x) = -2,4 \text{ kN} \\ M(x) = 2,4(10-x) \text{ kNm} \end{array}$$



Exempel 4:



Balkens massa kan försummas i förhållande till de yttre lasterna. Rita upp skjurfkrafts- och bögmomentdiagrammet.

- Bestäm resultantkraften R och placeringen x_R :

$$\underline{0 \leq x \leq 2}$$

$$R = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 1 \quad [\text{kN}]$$

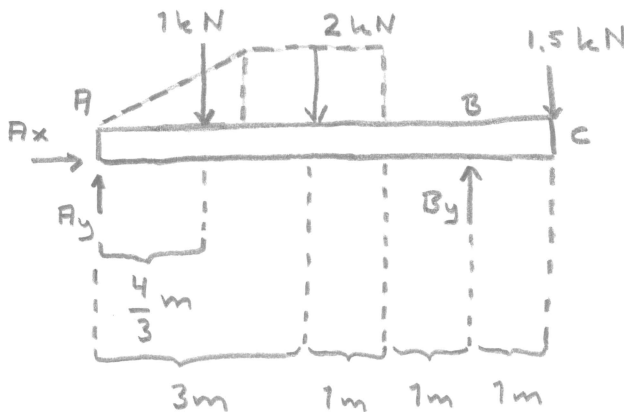
$$x_R = \frac{\int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx}{R} = \frac{\left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2}{1} = \frac{4}{3} \quad [\text{m}]$$

$$\underline{2 \leq x \leq 4}$$

$$R = \int_2^4 1 \cdot dx = \left[x \right]_2^4 = 2 \quad [\text{kN}]$$

$$x_R = \frac{\int_2^4 x \cdot 1 dx}{R} = \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4}{2} = \frac{\frac{16}{2} - \frac{4}{2}}{2} = 3 \quad [\text{m}]$$

- Frilägg hela balken:



- Kraft- och momentjämvikt:

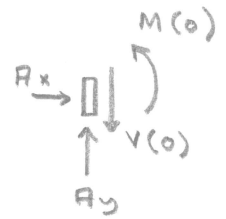
$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \sum F_x = 0 \quad A_x = 0 \\ 2) \quad \sum F_y = 0 \quad A_y - 1 - 2 + B_y - 1,5 = 0 \\ 3) \quad \sum \hat{M} = 0 \quad -1 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot 3 + B_y \cdot 5 - 1,5 \cdot 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_x = 0 \text{ kN} \\ A_y = 1,233 \text{ kN} \\ B_y = 3,27 \text{ kN} \end{array}$$

- Bestäm ett uttryck för $V(x)$ respektive $M(x)$:

$0 < x < 2$

$$\int_{V(0)}^{V(x)} dV = - \int_0^x \frac{x}{2} dx \Rightarrow V(x) = V(0) - \frac{x^2}{4}$$

där $V(0) = A_y \Rightarrow V(x) = 1,233 - \frac{x^2}{4}$



$$\int_{M(0)}^{M(x)} dM = \int_0^x V(x) dx = \int_0^x \left(1,233 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(1,233x - \frac{x^3}{12}\right)$$

$\Rightarrow M(x) = M(0) + \left(1,233x - \frac{x^3}{12}\right)$ där $M(0) = 0$

$\Rightarrow M(x) = 1,233x - \frac{x^3}{12}$

$2 < x < 4$

$$\int_{V(2)}^{V(x)} dV = - \int_2^x 1 dx \Rightarrow V(x) = V(2) - (x - 2)$$

där $V(2) = A_y - 1 = 0,233 \Rightarrow V(x) = 2,233 - x$

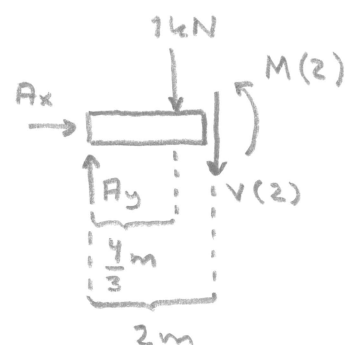
$$\int_{M(2)}^{M(x)} dM = \int_2^x V(x) dx = \int_2^x (2,233 - x) dx = \left[2,233x - \frac{x^2}{2}\right]_2^x =$$

$$= \left(2,233x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2,233 \cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2,233x - 2,466$$

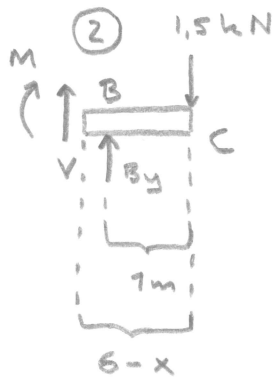
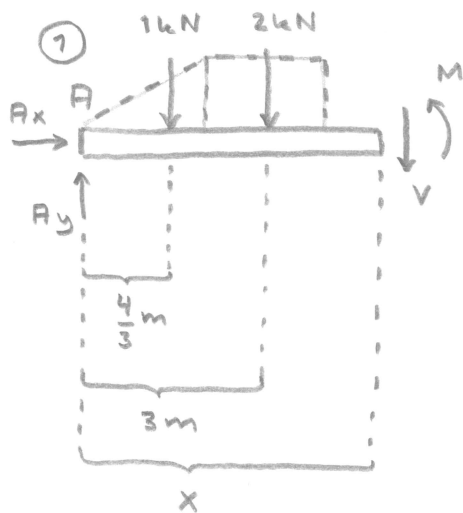
$\Rightarrow M(x) = M(2) - \frac{x^2}{2} + 2,233x - 2,466$

där $M(2) = 1 \cdot \frac{4}{3} + V(2) \cdot 2 = 1,333 + 0,466$

$\Rightarrow M(x) = -\frac{x^2}{2} + 2,233x - 0,667$



$$4 < x < 5$$



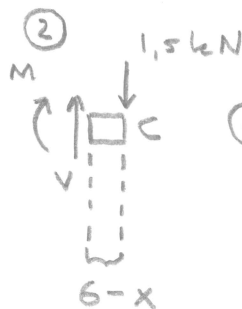
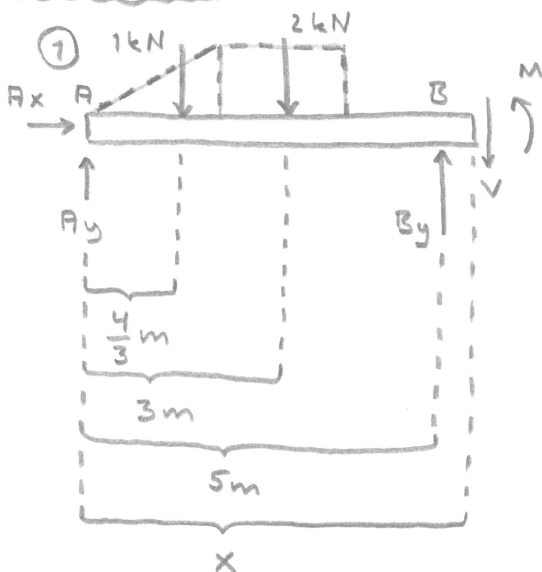
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum F_y = 0 \quad & A_y - 1 - 2 - V(x) = 0 \\ \sum \bar{A} = 0 \quad & -1 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot 3 - V(x) \cdot x + M(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x) = -1,767 \text{ kN}, \quad M(x) = 7,33 - 1,767x \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum F_y = 0 \quad & V(x) + B_y - 1,5 = 0 \\ \sum \bar{C} = 0 \quad & -V(x) \cdot (6 - x) - B_y \cdot 1 - M(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x) = -1,767 \text{ kN}, \quad M(x) = 7,33 - 1,767x \text{ kNm}$$

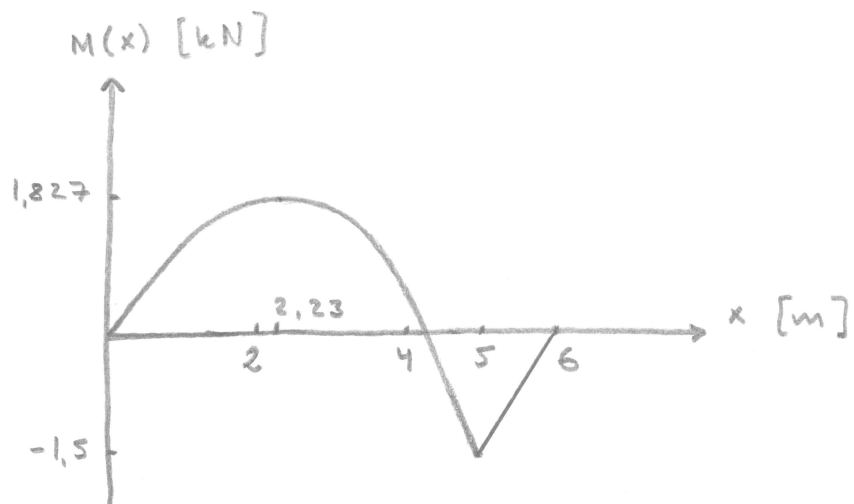
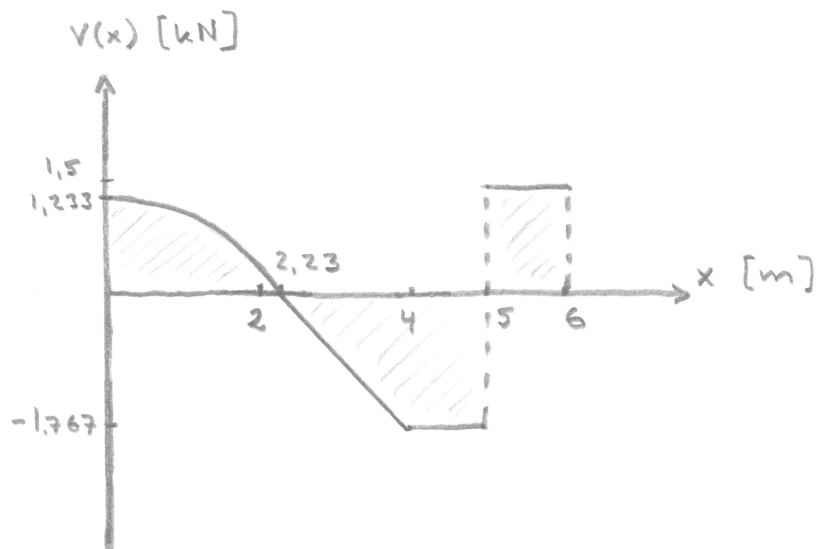
$$5 < x < 6$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum F_y = 0 \quad & V(x) - 1,5 = 0 \\ \sum \bar{C} = 0 \quad & -M(x) - V(x) \cdot (6 - x) = 0 \end{aligned}$$

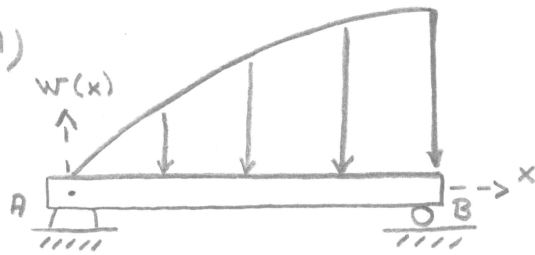
$$\begin{aligned} V(x) &= 1,5 \text{ kN} \\ \Rightarrow M(x) &= 1,5(x - 6) \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum F_y = 0 \quad & A_y - 1 - 2 + B_y - V(x) = 0 \\ \sum \bar{A} = 0 \quad & -1 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot 3 + B_y \cdot 5 - V(x) \cdot x + M(x) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V(x) &= 1,5 \text{ kN} \\ M(x) &= 1,5(x - 6) \text{ kNm} \end{aligned}$$



Uppgifter Balkar

B1)

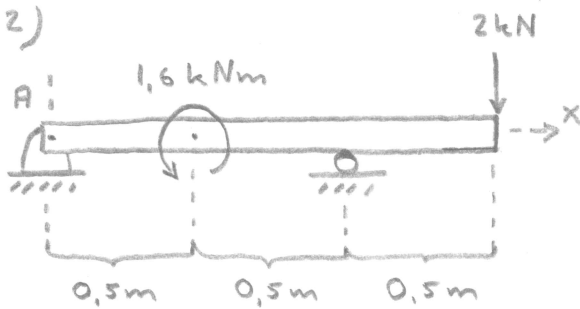


$$w(x) = k_1 x - k_2 x^2$$

Balkens längd: 3 m

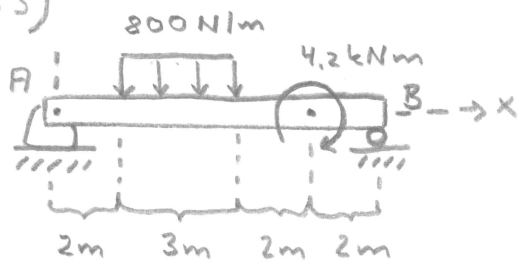
En utbredd last längs en balk är fördelad enligt figur. Vid $x = 3\text{ m}$ är belastningen $w = 3,6\text{ kN/m}$. Vid $x = 0\text{ m}$ ökar belastningen med 2000 N/m per meter. Beräkna stödreaktionerna på balken vid A och B.

B2)



Rita upp skjurfkrafts- och böjmomentendiagrammet för balken. Balkens massa kan försummas i förhållande till de yttre lasterna.

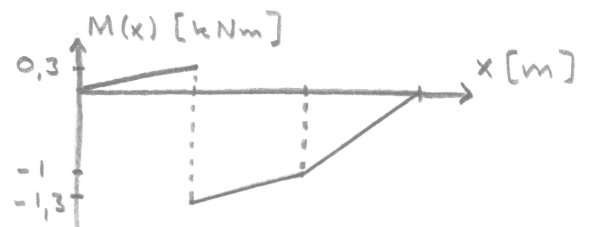
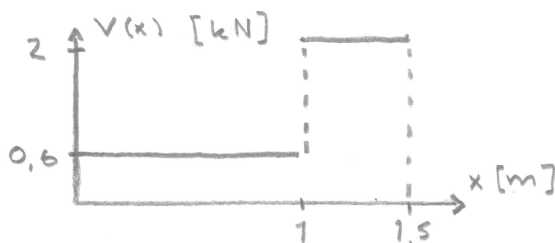
B3)



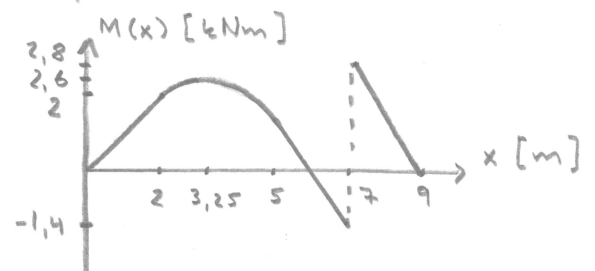
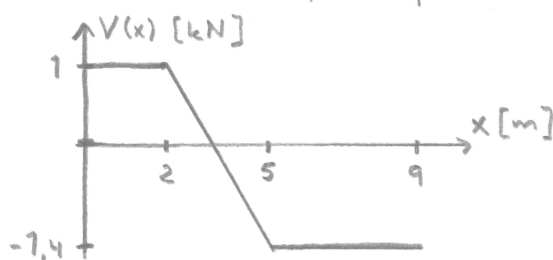
Rita upp skjurfkrafts- och böjmomentendiagrammet för balken. Vilka värden antar skjurfkraften och böjmomentet för $x = 6\text{ m}$? Beräkna det maximala böjmomentet $M_{\max}$. Försumma massan.

B1) Svar: $A_x = 0\text{ N}$, $A_y = 2399\text{ N}$, $B_y = 4198\text{ N}$

B2)

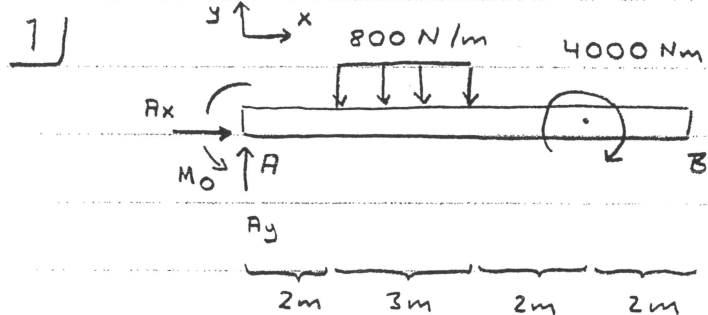


B3)

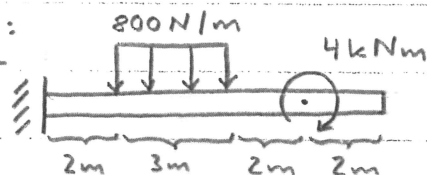


Svar: $V(6) = -1,4\text{ kN}$, $M(6) = 0\text{ kNm}$, $M_{\max} = 2,8\text{ kNm}$

Tentamen Mekanik GK för F del 2, 26/8 - 2003



Uppgift:



Rita skjuvkrafts- och böjmomentdiagram.

$$[N] \quad \sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$[N] \quad \sum F_y = 0 \quad A_y - 800 \cdot 3 = 0$$

$$[Nm] \quad \sum \bar{M}_A = 0 \quad M_0 - 800 \cdot 3 \cdot 3,5 - 4000 = 0$$

$\Rightarrow$

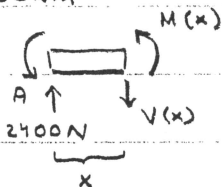
$$A_x = 0 N$$

$$A_y = 2400 N$$

$$M_0 = 12400 Nm$$

$$0 < x < 2$$

$$12400 Nm$$



$$\sum F_y = 0 \quad 2400 - V(x) = 0 \quad [N]$$

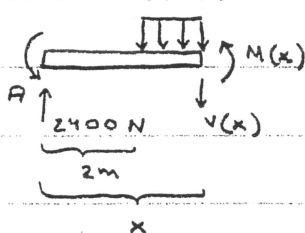
$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad 12400 + M(x) - V(x) \cdot x = 0 \quad [Nm]$$

$$\Rightarrow V(x) = 2400 N, \quad M(x) = 2400 \cdot x - 12400 Nm$$

$$2 < x < 5$$

$$12400 Nm$$

$$800 N/m$$



$$\sum F_y = 0 \quad 2400 - 800 \cdot (x-2) - V(x) = 0 \quad [N]$$

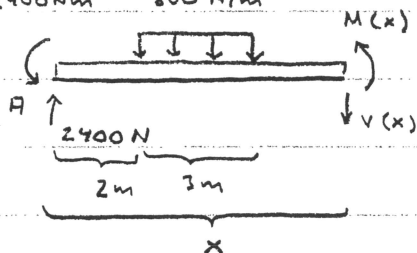
$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad 12400 + M(x) - V(x) \cdot x - 800 \cdot (x-2) \cdot \left[\frac{2+x-2}{2} \right] = 0 \quad [Nm]$$

$$\Rightarrow V(x) = -800x + 4000 N, \quad M(x) = -400x^2 + 4000x - 14000 Nm$$

$$5 < x < 7$$

$$12400 Nm$$

$$800 N/m$$



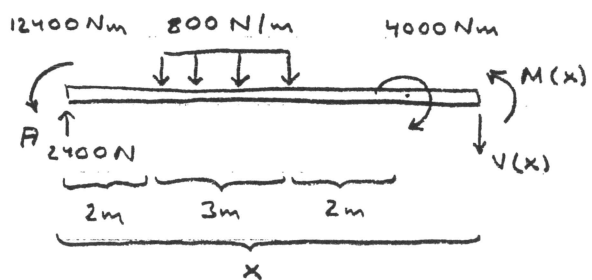
$$\sum F_y = 0 \quad 2400 - 800 \cdot 3 - V(x) = 0 \quad [N]$$

$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad 12400 + M(x) - V(x) \cdot x - 800 \cdot 3 \cdot 3,5 = 0 \quad [Nm]$$

$$\Rightarrow V(x) = 0 N, \quad M(x) = -4000 Nm$$

1

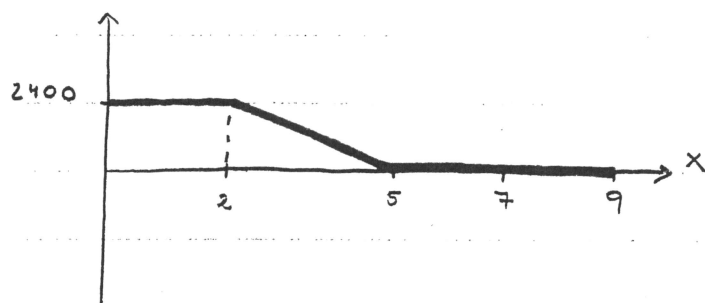
$$7 < x < 9$$



$$\sum F_y = 0 \quad 2400 - 800 \cdot 3 - V(x) = 0 \quad [\text{N}]$$

$$\sum \bar{M}_A = 0 \quad 12400 + M(x) - V(x) \cdot x - 800 \cdot 3 \cdot 3,5 - 4000 = 0 \quad [\text{Nm}]$$

$$\Rightarrow V(x) = 0 \text{ N}, \quad M(x) = 0 \text{ Nm}$$

 $V(x) [\text{N}]$

 $M(x) [\text{Nm}]$
