LUND UNIVERSITY
Mekanik, LTH

Tentamen i Mekanik, grundkurs för F, del 2

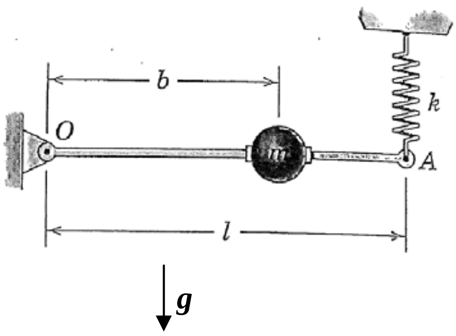
Den 27 april 2019, kl. 8-13

Skrivningen består av 5 uppgifter. Införda storheter och beteckningar skall definieras (och eventuellt markeras i figur). Uppställda ekvationer skall motiveras. Räkningarna skall redovisas i den omfattning att de lätt kan följas. Lycka till!

Tillåtna hjälpmedel: Utdelad formelsamling, miniräknare.

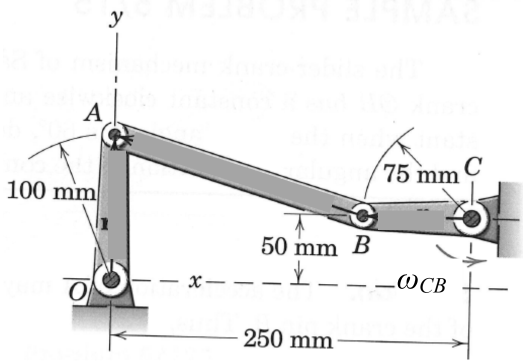
---

1. En liten massa m sitter fast på en lätt stång på avstånder b från den glatta leden O. Stångens andra ände, A, befinner sig på avståndet l från O. I A är en fjäder med fjäderkonstanten k fäst enligt figur. Bestäm egenvinkelfrekvensen vid små svängningar kring jämviktsläget.

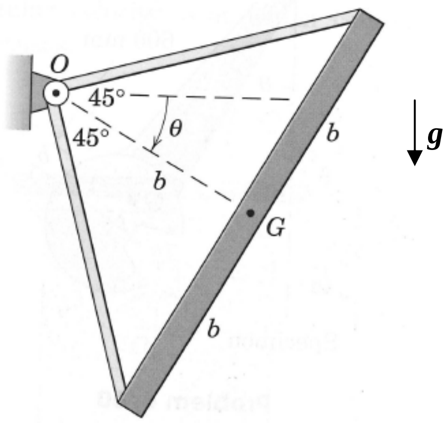


---

2. Tre stänger är sammansatta med fyra friktionsfria leder i O, A, B och C, enligt figuren. I det visade läget, där CB är horisontell och OA vertikal, är vinkelhastigheten hos länkarmen CB konstant, ω_{CB} = 2 rad/s moturs. Bestäm, i detta läge, vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen hos länkarmarna OA och AB.

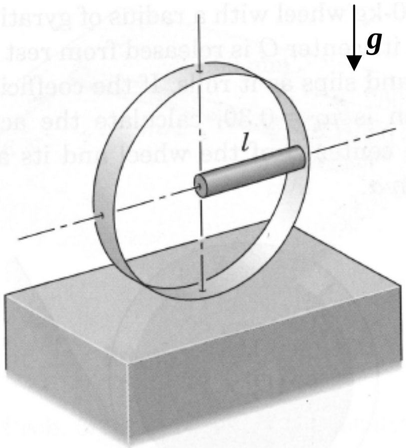


3. En jämntjock smal stång med massan m och längd $2b$ är monterad i en vinkelrät ram med försumbar massa. Stången och ramen roterar friktionsfritt i vertikalplanet kring en fix punkt O. Om stången släpps från vila då $\theta = 0$ bestäm krafterna vid O som funktion av vridningsvinkeln θ.



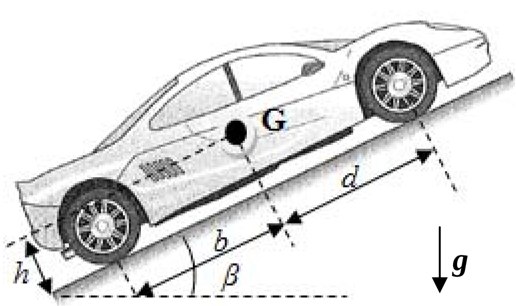
---

4. En jämntjock smal stång med längden l och massan m sitter fast i en ring med radien l, vars massa är försumbar. Kroppen släpps från vila då stången är i ett horisontellt läge, enligt figuren. Bestäm friktionskraften, normalkraften och kroppens vinkelacceleration precis efter att den släppts. Antag att friktionen är tillräcklig så att ringen inte glider.

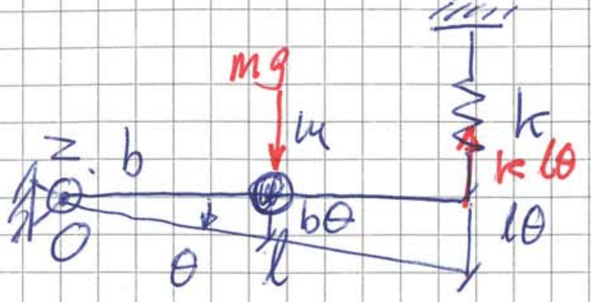


---

5. En framhjulsdriven bil med massan m har en acceleration a uppför en backe med lutningsvinkeln β. Bestäm kontaktkraften under framhjulsparet. Hjulens massa är liten i jämförelse med hela bilens och kan försummas.



1)



$$M_{Oz} = \dot{H}_{Oz}$$

$$M_{Oz} = -mgb + kl\theta l$$

$$H_{Oz} = -bmb\dot{\theta} \qquad \dot{H}_{Oz} = -mb^2\ddot{\theta}$$

$$-mb^2\ddot{\theta} = -mgb + kl^2\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{mb^2}\theta = \frac{g}{b}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{l}{b}$$

(2)
$$\begin{cases} \bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{\omega}_{AB} \times r_{BA} & (1) \\ \bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{\omega}_{OA} \times \bar{r}_{OA} = \bar{\omega}_{OA} \times \bar{r}_{OA} & (2) \\ \bar{V}_B = \bar{V}_C + \bar{\omega}_{BC} \times \bar{r}_{CB} = \bar{\omega}_{BC} \times \bar{r}_{CB} & (3) \end{cases}$$

$\bar{r}_{OA} = (0, 0.1, 0)$, $\bar{r}_{CB} = (-0{,}075, 0, 0)$, $\bar{r}_{BA} = (-0{,}175, 0.05, 0)$

$\bar{\omega}_{AB} = (0, 0, \omega_{AB})$, $\bar{\omega}_{OA} = (0, 0, \omega_{OA})$, $\bar{\omega}_{BC} = (0, 0, 2)$

$(2) \Rightarrow \bar{V}_A = (-0{,}1\omega_{OA}, 0, 0)$

$(3) \Rightarrow \bar{V}_B = (0, -0{,}15, 0)$

$(1) \Rightarrow (-0{,}1\omega_{OA}, 0, 0) = (0, -0{,}15, 0) + (-0{,}05\omega_{AB}, -0{,}175\omega_{AB}, 0)$

$\Rightarrow \underline{\omega_{AB} = -\frac{6}{7} \text{ rad/s}}$, $\underline{\omega_{OA} = -\frac{3}{7} \text{ rad/s}}$

$$\begin{cases} \bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\omega}_{AB} \times (\bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{BA}) + \dot{\bar{\omega}}_{AB} \times \bar{r}_{BA} & (4) \\ \bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_O}_{=0} + \bar{\omega}_{OA} \times (\bar{\omega}_{OA} \times \bar{r}_{OA}) + \dot{\bar{\omega}}_{OA} \times \bar{r}_{OA} & (5) \\ \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{\omega}_{BC} \times (\bar{\omega}_{BC} \times \bar{r}_{CB}) + \underbrace{\dot{\bar{\omega}}_{BC}}_{=0} \times \bar{r}_{CB} & (6) \end{cases}$$

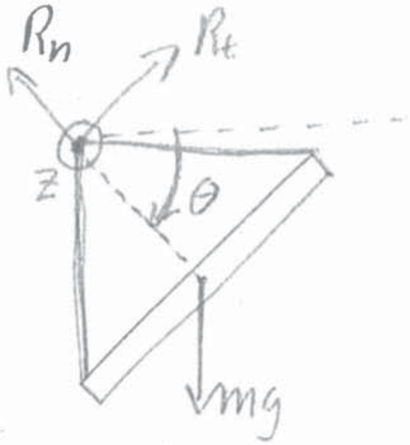
$(5) \Rightarrow \bar{a}_A = (-0{,}1\dot{\omega}_{OA}, -0{,}1(\frac{3}{7})^2, 0)$

$(6) \Rightarrow \bar{a}_B = (0{,}3, 0, 0)$

$(4) \Rightarrow (-0.1\dot{\omega}_{OA}, -0{,}1(\frac{3}{7})^2, 0) = (0.3, 0, 0) + (0.175\omega_{AB}^2, -0{,}05\omega_{AB}^2, 0)$
$+ (-0{,}05\dot{\omega}_{AB}, -0{,}175\dot{\omega}_{AB}, 0)$

$\Rightarrow \dot{\omega}_{AB} = -0{,}1050 \text{ rad/s}^2$
$\underline{\dot{\omega}_{OA} = -4{,}34 \text{ rad/s}^2}$

③ Friläggning



$\bar{F} = m\bar{a}_G$ i n, t-riktn.

$$\begin{cases} R_t - mg\cos\theta = -mb\ddot{\theta} & (1) \\ R_n - mg\sin\theta = mb\dot{\theta}^2 & (2) \end{cases}$$

Beräkna $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ och sätt in i (1) och (2)

$M_z = \dot{H}_z$

$$-mgb\cos\theta = -I\ddot{\theta} \quad , \quad I = \frac{m(2b)^2}{12} + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{4b}\cos\theta$$

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\,d\theta \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{3g}{2b}\cos\theta\,d\theta \Rightarrow$$

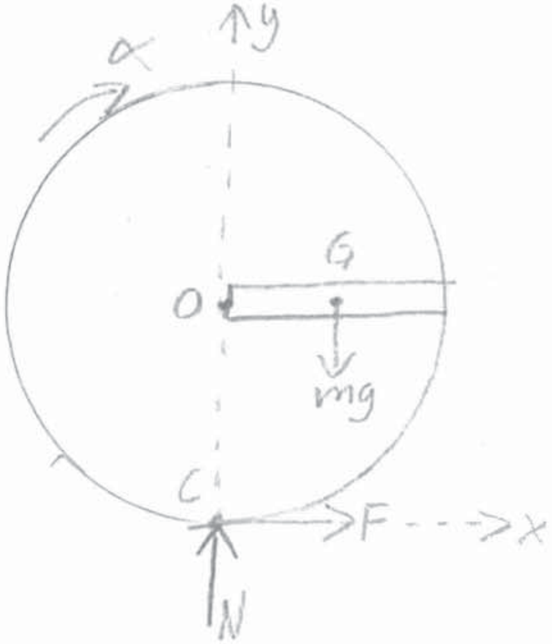
$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2b}\sin\theta$$

$$(1) \Rightarrow R_t = \frac{mg}{4}\cos\theta$$

$$(2) \Rightarrow R_n = \frac{5}{2}mg\sin\theta$$

④ Friläggning

C-momentancentra



$\bar{a}_G = \bar{a}_O + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{OG}) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{OG}$

$\bar{a}_O = (l\alpha, 0, 0)$, $\omega = 0$, $\bar{r}_{OG} = (\frac{l}{2}, 0, 0)$

$\dot{\bar{\omega}} = (0, 0, -\alpha)$

$\Rightarrow \bar{a}_G = \alpha(l, -\frac{l}{2}, 0)$

$I_G = \frac{1}{12} m l^2$

Moment ekv

2D

$\bar{M}_C = \dot{\bar{H}}_G + \bar{r}_{CG} + m\bar{a}_G$, $\bar{r}_{CG} = (\frac{l}{2}, l, 0)$

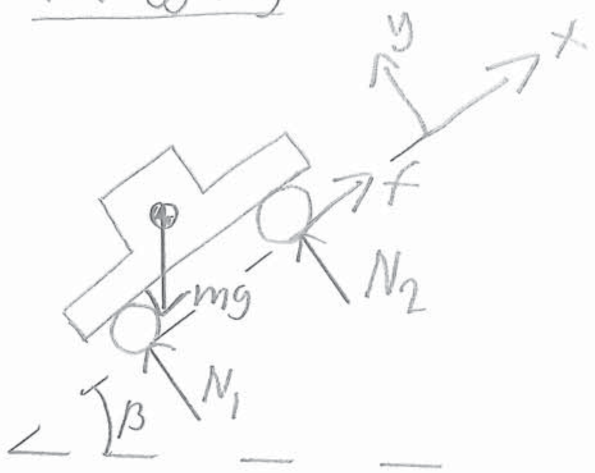
$mg\frac{l}{2} = I_G\alpha + m\alpha l^2 + m\alpha\frac{l}{2}\frac{l}{2} \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{\frac{3g}{8l}}}$

Kraftekv.

$\uparrow \quad N - mg = ma_{G_y} = m(-\frac{l\alpha}{2}) \Rightarrow N = \underline{\underline{\frac{13}{16}mg}}$

$\rightarrow \quad F = ma_{G_x} = m\alpha l \Rightarrow \underline{\underline{F = \frac{3}{8}mg}}$

④ Friläggning



N_2 sökt

$$\begin{cases} \bar{F} = m\bar{a}_G \\ \bar{M}_G = \dot{\bar{H}}_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = m\ddot{x}_G \\ F_y = m\ddot{y}_G \\ M_z = I_G\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f - mg\sin\beta = ma & (1) \\ N_1 + N_2 - mg\cos\beta = 0 & (2) \\ N_2 d - N_1 b + fh = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \underline{f = m(a + g\sin\beta)}$

$(2) \Rightarrow N_1 = mg\cos\beta - N_2$

$(3) \Rightarrow \underline{N_2 = \dfrac{m(gb\cos\beta - ah - gh\sin\beta)}{d+b}}$