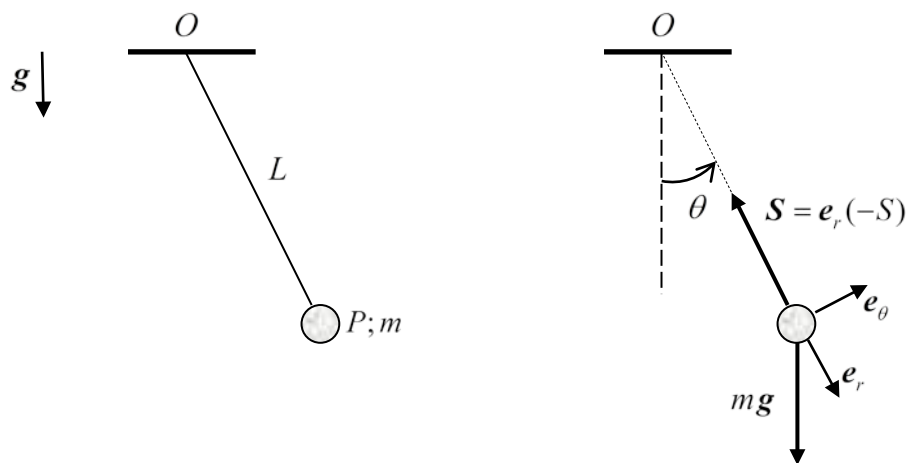


Sammanfattning av Föreläsning i Svängningsrörelse (FMEA10)

Svängningsrörelse, fria odämpade svängningar (12.1-12.3)

Partikelpendeln (Den matematiska pendeln): En partikel P med massan m är fästad i sin ena ände på en lätt, fullkomligt böjlig lina, med längden L , som, i sin andra ände, är fästad i en fix punkt O . Pendeln tillåts svänga i ett vertikalt plan och påverkas då av tyngdkraften. Eventuella krafter från den omgivande luften försummas. Frilägg partikeln P , inför de yttre krafterna *spännkraften* i linan: $\mathbf{S} = \mathbf{e}_r(-S)$ och *tyngdkraften*: $m\mathbf{g}$. Om vi förutsätter att linan inte kan ta tryckkrafter så måste $S \geq 0$.



Figur 1.1 Partikelpendeln.

Vi inför plan-polära koordinater (r, θ) . Då gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{Op} = \mathbf{e}_r r$ och därmed erhålles hastigheten $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r \dot{r} + \dot{\mathbf{e}}_r r = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} = \mathbf{e}_\theta L \dot{\theta}$ eftersom $r = L$ är en konstant, d v s $\dot{L} = 0$. Följaktligen blir accelerationen

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_\theta L \ddot{\theta} + \dot{\mathbf{e}}_\theta L \dot{\theta} = \mathbf{e}_r (-L \dot{\theta}^2) + \mathbf{e}_\theta L \ddot{\theta} \quad (1.1)$$

Kraftekvationen ger villkoret:

$$\mathbf{S} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \quad (1.2)$$

vilket är ekvivalent med

$$(r - led): -S + mg \cos \theta = -mL\dot{\theta}^2 \quad (1.3)$$

$$(\theta - led): -mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \quad (1.4)$$

Ekvation (1.4) kan skrivas

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin \theta = 0 \quad \text{där} \quad \omega_n^2 = \frac{g}{L} \quad (1.5)$$

Detta är en *ordinär differentialekvation av andra ordningen*. En *lösning* till differentialekvationen ges av en funktion $\theta = \theta(t)$ som satisfierar (1.5). För att lösningen skall vara entydig krävs att *begynnelsedata* föreskrivs

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \quad (1.6)$$

där θ_0 och $\dot{\theta}_0$ är givna konstanter (begynnelsevärden). Observera att $\theta(t) = \theta_0$ är en lösning till (1.5) med begynnelse data $\theta_0 = 0$ och $\dot{\theta}_0 = 0$. Detta svarar mot den *statiska jämviktslösningen* då pendeln hänger rakt ned och är i vila.

När pendelns rörelse $\theta = \theta(t)$ är känd kan vi bestämma spännkraften i linan S genom att utnyttja (1.3), dvs.

$$S = S(t) = mg \cos \theta(t) + mL\dot{\theta}(t)^2 \quad (1.7)$$

Uppgift 1.1: Visa att begynnelsedata $\theta_0 = \pi$ och $\dot{\theta}_0 = 0$ svara mot en statisk jämviktslösning. Vad gäller för då för spännkraften?

För att lösa differentialekvationen (1.5) multiplicerar vi ekvationens båda led med $\dot{\theta}$, enligt

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_n^2 \dot{\theta} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_n^2 \cos \theta \right) = 0$$

och detta är ekvivalent med

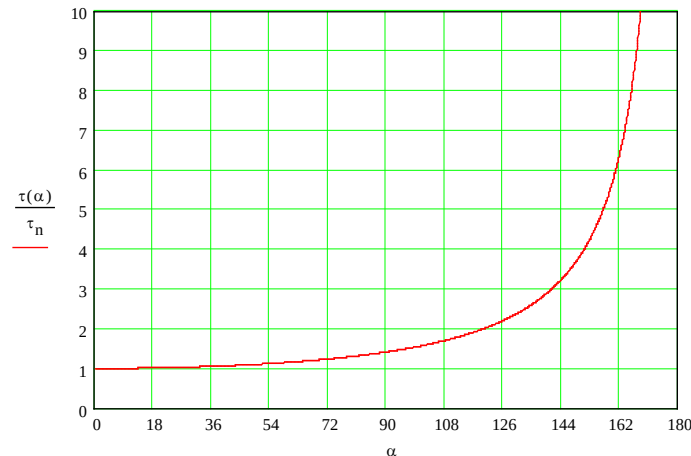
$$\frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \omega_n^2 \cos \theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \omega_n^2 \cos \theta_0 \quad (1.8)$$

dvs. vi har nu erhållit en differentialekvation av första ordningen. Den är emellertid olinjär och dess lösning kan inte uttryckas i elementära funktioner (som tex. polynom och trigonometriska funktioner). Lösningarna kan uttryckas i så kallade elliptiska funktioner men

vi kommer inte att gå in på detta här utan nöjer oss med att konstatera att svängningstiden, dvs. tiden för en fullbordad svängningsrörelse (period), då $\theta(0) = \theta_0$ och $\dot{\theta}(0) = 0$, ges av

$$\tau = \tau(\theta_0) = \tau_n \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + \dots \right) \quad (1.9)$$

där $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$



Figur 1.2 Svängningstiden τ för en matematisk pendel som funktion av utslagsvinkeln α

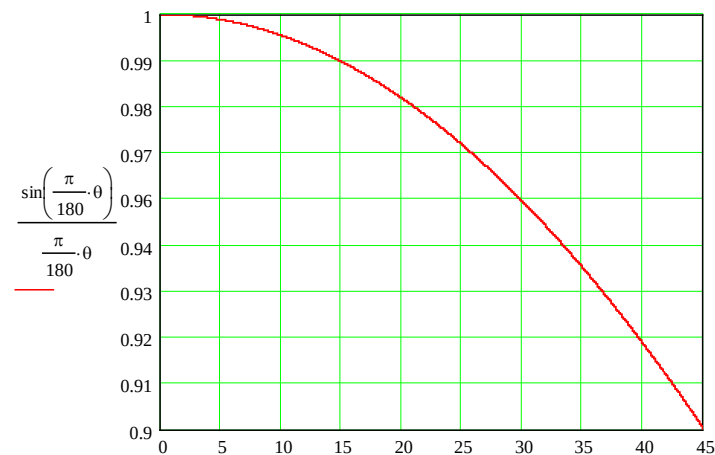
Små svängningar (vibrationer): I tekniska tillämpningar är man ofta intresserad av små svängningar, dvs. svängningar med liten amplitud, kring ett statiskt jämviktsläge. Om vi i fallet partikelpendeln betraktar små svängningar (små vinkelutslag) kring det statiska jämviktsläget $\theta = 0$ kan vi utnyttja Maclaurins formel ("Endim." sid. 414) för sinusfunktionen, dvs.

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

För "små" θ har vi således approximationen $\sin \theta \cong \theta$ och vi kan ersätta differentialekvationen (1.5) med

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (1.10)$$

Detta utgör *standardformen* för den differentialekvation som matematiskt beskriver fria odämpade små svängningar. Lösningar $\theta = \theta(t)$ till (1.10) kan sägas utgöra approximationer till lösningar till (1.5) om vinkeln θ är tillräckligt liten. För vilka vinklar gäller approximationen $\sin \theta \cong \theta$? I nedanstående figur visas kvoten $\frac{\sin \theta}{\theta}$ som funktion av θ i intervallet $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$. Som framgår av figuren så är approximationen god i intervallet $0^\circ \leq \theta < 15^\circ$ och hyfsad i intervallet $15^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.



Figur 1.3 $\frac{\sin \theta}{\theta}$ som funktion av θ

Små pendelsvängningar ges nu av differentialekvationen (1.10) med begynnelsedata enligt (1.6). Hur löser man detta? Vi provar med en ansättning i form av en lineärkombination av harmoniska funktioner (dvs. sinus och cosinus). Ansats: $\theta(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ där A, B och ω är konstanter som skall bestämmas så att (1.10) och (1.6) är uppfyllda. Vi deriverar den ansatta lösningen en gång

$$\dot{\theta}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

och en gång till

$$\ddot{\theta}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 \theta(t)$$

detta insatt i (1.10) ger

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_n^2 \theta(t) = (\omega_n^2 - \omega^2) \theta(t) = 0$$

Om vi nu antar att $\theta(t)$ inte är identiskt lika med noll (dvs. jämviktslösningen) så följer att

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \pm \omega_n$$

Den ansatta lösningen kan då skrivas

$$\theta(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

och med utnyttjande av begynnelsedata (1.6) erhålles

$$\theta(0) = B = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = A\omega_n = \dot{\theta}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}$$

och vi har lösningen:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \theta_0 \cos \omega_n t = a \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1.11)$$

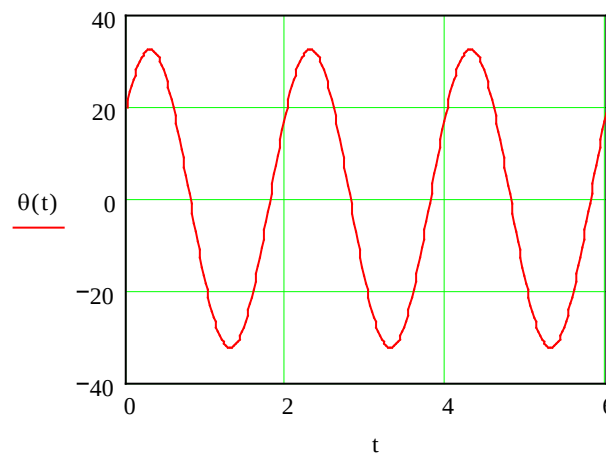
där, om $\theta_0 > 0$ (se "Endim." sid. 106)

$$a = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\right)^2 + \theta_0^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_n \theta_0}{\dot{\theta}_0}\right), & \dot{\theta}_0 > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \dot{\theta}_0 = 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_n \theta_0}{\dot{\theta}_0}\right) + \pi, & \dot{\theta}_0 < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

där a benämnes svängningens *amplitud*, ω_n dess *egenvinkelfrekvens* (naturliga vinkelfrekvens) och φ dess *fasvinkel*. Svängningens *egensvängningstid* och *egenfrekvens* ges av

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{och} \quad f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Exempel 1.1: Antag $L = 1.0\text{m}$ och $g = 9.81\text{ms}^{-2}$. Detta ger $\omega_n = 3.13\text{rad s}^{-1}$. med begynnelsedata $\theta_0 = 20^\circ$ och $\dot{\theta}_0 = 80^\circ \text{s}^{-1}$ erhålles rörelsen enligt nedanstående figur.



Figur 1.4 Pendelsvängning med vinkeln θ i grader.

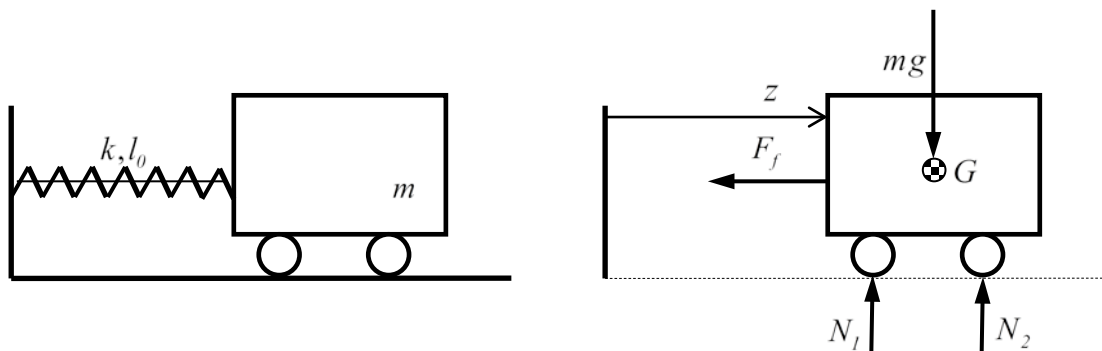
Uppgift 1.2: Bestäm egensvängningstiden för rörelsen i Exempel 1.1 ovan.

Fjäder-massa system: Hur fungerar en fjäder? Jo, den kraft som krävs för att trycka i hop (eller sträcka ut) fjädern är proportionell mot hoptryckningen (respektive utsträckningen), dvs.

$$F_f = k\Delta l \quad (1.13)$$

där F_f är fjäderkraften, $\Delta l = l - l_0$ är fjäderns längdändring, l är fjäderns aktuella längd vid belastning med kraften F_f , l_0 är fjäderns ospända (obelastade) längd och k är fjäderkonstanten som representerar ett mått på fjäderns styvhet. Ekvation (1.13) definierar en så kallad *linjärt elastisk fjäder*.

Vi studerar nu följande problem. En vagn med massan m kan röra sig utan motstånd på ett horisontellt underlag (den rullar lätt). Vagnen är kopplad till en linjärt elastisk fjäder med fjäderkonstanten k och den ospända längden l_0 . Frilägg vagnen! Inför fjäderkraften F_f , tyngdkraften mg och normalkrafterna N_1, N_2 . Inför lägeskoordinaten z .



Figur 1.5 Fjäder-massa system.

Kraftekvationen:

$$(\rightarrow): -F_f = \ddot{z}m \quad (1.14)$$

där $F_f = k(z - l_0)$. Detta ger differentialekvationen (z fjäderns aktuella längd)

$$-k(z - l_0) = \ddot{z}m \quad (1.15)$$

Inför variabeln $x = z - l_0$, dvs. x är fjäderns förlängning. Då kan (1.15) skrivas

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (1.16)$$

där vi utnyttjat att $\ddot{z} = \ddot{x}$. Begynnelsedata hörande till (1.16) ges av

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (1.17)$$

Vi kan konstatera att ekvationerna (1.16)-(1.17) har samma matematiska form som ekvationerna (1.10), (1.6) i fallet med partikelpendeln och lösningarna måste därför ha samma form.

Uppgift 1.3: Skriv upp lösningen till (1.16)-(1.17).

Genom att använda energiekvationen kan vi erhålla en alternativ härledning av ekvation (1.16). Systemets *mekaniska energi*

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{kinetisk energi}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{elastisk energi}} \quad (1.18)$$

Enligt *effektlagen* gäller $\dot{E} = P$ där P är effekten av övriga krafter, (förutom fjäderkraften), som verkar på vagnen, dvs. enligt figur 1.5 tyngdkraften och normalkrafterna. Dessa krafter är emellertid vinkelräta mot vagnens hastighet och därför *effektlösa*. Således gäller att $P = 0$ och därmed

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k2x\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Således, om $\dot{x} \neq 0$ så följer att $m\ddot{x} + kx = 0$ vilket är rörelseekvationen för vagnen.

Sammanfattning (Fria, odämpade svängningar)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

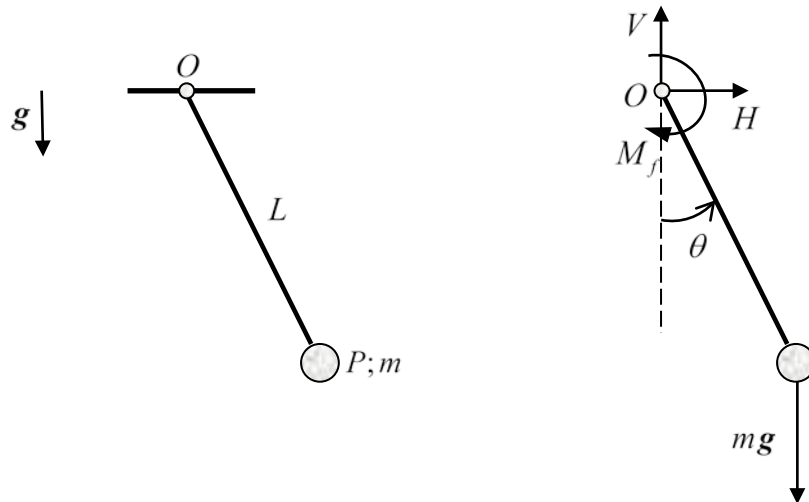
$$x(t) = a \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right), & v_0 > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & v_0 = 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right) + \pi, & v_0 < 0 \end{cases}$$

Fria dämpade svängningar (12.4)

Den dämpade partikelpendeln: (Detta avsnitt kan överhoppas) Vi studerar åter partikelpendeln men antar nu att linan är utbytt mot en lätt, stel stång med längden L .

Dessutom verkar ett *bromsande friktionsmoment* M_f från lagringen i O på stängen. Vi frilägger hela pendeln, dvs. partikel + stång och inför det system av yttre krafter och moment som verkar på pendeln.



Figur 2.1

I punkten O angriper reaktionskraftskomponenterna V, H samt friktionsmomentet M_f . Tyngkraften mg angriper partikeln eftersom stängen betraktas som lätt.

Momentekvationen: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ där $\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{v}_P dm_P = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{v}_P m = \mathbf{e}_r L \times \mathbf{e}_\theta L \dot{\theta} m = \mathbf{e}_z mL^2 \dot{\theta}$

$$\curvearrowleft O : -M_f - mgL \sin \theta = \frac{d}{dt}(mL^2 \dot{\theta}) = mL^2 \ddot{\theta} \Leftrightarrow mL^2 \ddot{\theta} + M_f + mgL \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

Vi antar nu att det bromsande momentet M_f ges av

$$M_f = c \dot{\theta} \quad (2.2)$$

där $c [Nms rad^{-1}]$ är en positiv konstant, den så kallade *dämpningskonstanten*. Motståndet, i form av momentet M_f , är således proportionellt mot pendelns vinkelhastighet och motriktat rörelsen, se figuren ovan! Man brukar benämna ett rörelsemotstånd av denna typ *visköst*. Ekvation (2.1) kan nu skrivas

$$mL^2 \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mgL \sin \theta = 0 \quad (2.3)$$

Vi noterar att $\theta = \theta(t) = 0$ är även i detta fall en lösning till (2.3), den så kallade jämviktslösningen. Vi betraktar små svängningar kring jämviktslösningen och utnyttjar approximationen $\sin \theta \cong \theta$. Detta ger oss rörelseekvationen

$$mL^2 \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + mgL\theta = 0 \quad (2.4)$$

eller

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{mL^2} \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (2.5)$$

där $\omega_n^2 = \frac{g}{L}$. Vi inför nu *dämpningsfaktorn* (den *relativa dämpningen*) ζ (grekiskt "zäta") definierad av

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n mL^2} = \frac{c}{2m\sqrt{gL^3}} \quad (2.6)$$

Dämpningsfaktorn ζ är en *icke-negativ, dimensionslös storhet*. Rörelseekvationen (2.5) kan nu skrivas

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (2.7)$$

Detta utgör *standardformen* för den differentialekvation som matematiskt beskriver *fria dämpade svängningar*.

Uppgift 2.1: Härled (2.1) genom att utgå från Effektlagen, $\dot{E} = P$. Formulera då effekten för det bromsande momentet M_f !

Fjäder-massa-dämpare system: Förutom fjädern så har en viskös dämpare kopplats till vagnen enligt figuren nedan. Den viskösa dämparen ger upphov till en dämpkraft F_d definierad enligt

$$F_d = c\dot{x} \quad (2.8)$$

där dämpningskonstanten c [Nsm^{-1}]. Vi väljer en lägeskoordinat x så att $x=0$ svarar mot ospänd fjäder. Då erhålles

Kraftekvationen:

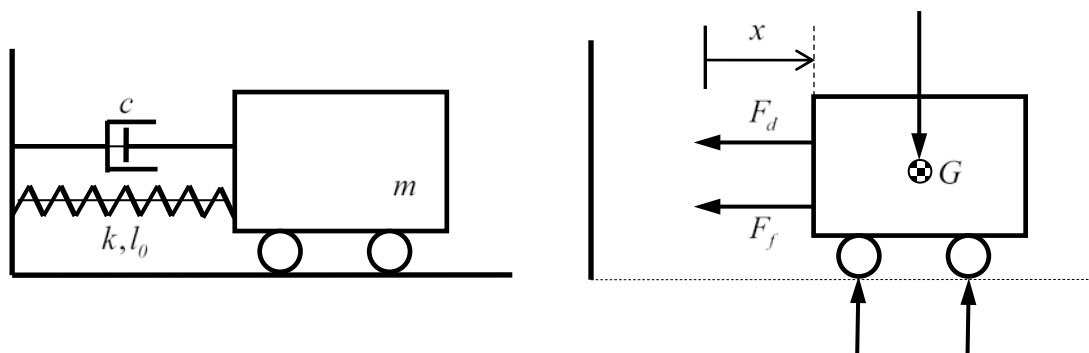
$$(\rightarrow): -F_d - F_f = \ddot{x}m \quad (2.9)$$

Med utnyttjande av (2.8) och $F_f = -kx$ erhålles, i kombination med (2.9), rörelseekvationen

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.10)$$

där

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad \zeta = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.11)$$



Figur 2.2

Hur löser man differentialekvationen (2.10)?

Uppgift 2.2: Kan den tidigare ansatsen $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ komma ifråga som lösning? Prova!

Enligt "Endim." sid 378 Sats 2 gäller följande (vi använder λ i stället för r som variabel):

Låt λ_1 och λ_2 vara nollställena (i allmänhet komplexa, dvs $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$) till det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 \quad (2.12)$$

Då ges samtliga lösningar till (2.10) av

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{om } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (2.13)$$

och av

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{\lambda_1 t}, \quad \text{om } \lambda_1 = \lambda_2 \quad (2.14)$$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Nollställena till karakteristiska polynomet ges av ($i^2 = -1$)

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d & \text{if } 0 \leq \zeta < 1 \\ (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n & \text{if } \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

där

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \zeta < 1 \quad (2.16)$$

Vinkelfrekvensen ω_d benämnes den *dämpade egenvinkelfrekvensen*. Lösningarna (2.13)-(2.14) kan då skrivas

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\omega_n \zeta t} (C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}) & \text{om } \zeta < 1 \\ e^{-\omega_n \zeta t} (C_1 t + C_2) & \text{om } \zeta = 1 \\ e^{-\omega_n \zeta t} (C_1 e^{\omega_n(\sqrt{\zeta^2-1})t} + C_2 e^{-\omega_n(\sqrt{\zeta^2-1})t}) & \text{om } \zeta > 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Vi är enbart intresserade av *reella lösningar*. Dessa åstadkommes om vi i (2.17)₁ väljer $C_2^* = C_1$ (komplext konjugerade) och om vi i (2.17)_{1,2} väljer C_1 och C_2 reella. Lösningarna ges då av

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\omega_n \zeta t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) & \text{om } \zeta < 1 \\ e^{-\omega_n \zeta t} (A_1 t + A_2) & \text{om } \zeta = 1 \\ e^{-\omega_n \zeta t} (A_1 e^{\omega_n(\sqrt{\zeta^2-1})t} + A_2 e^{-\omega_n(\sqrt{\zeta^2-1})t}) & \text{om } \zeta > 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

där $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Vi ser att karaktären hos lösningarna beror kritiskt på relativa dämpningen ζ . Vi har följande fall:

- (i) $0 \leq \zeta < 1$, *svag dämpning*. Rörelsen ges av en dämpad oscillerande lösning enligt (2.18)₁ ovan.
- (ii) $\zeta = 1$, *kritisk dämpning*. Rörelsen ges av en dämpad lösning enligt (2.18)₂.
- (iii) $\zeta > 1$, *stark dämpning*. Rörelsen ges av en dämpad lösning enligt (2.18)₃.

Vi noterar att $\zeta = 0$ svarar mot odämpat system. Antag svag dämpning ($0 \leq \zeta < 1$) och begynnelsedata enligt (1.17). Av (2.18)₁ följer att

$$x(0) = A_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\zeta \omega_n A_1 + A_2 \omega_d = v_0 \quad (2.19)$$

Detta ger

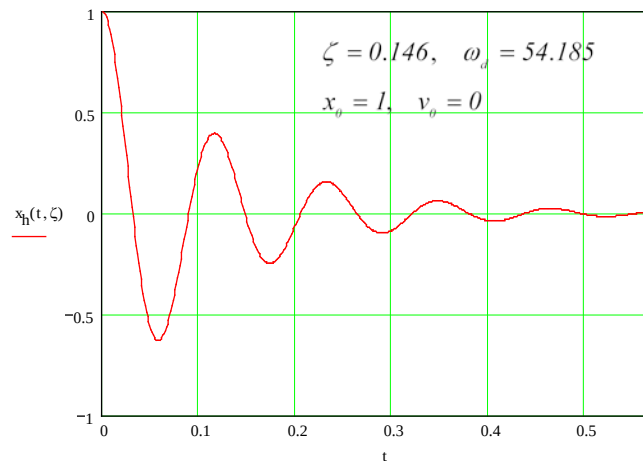
$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{1}{\omega_d} (v_0 + \zeta \omega_n x_0) \quad (2.20)$$

och lösningen

$$x(t) = e^{-\omega_n \zeta t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (2.21)$$

vilket representerar en dämpad oscillerande rörelse med vinkelfrekvensen ω_d . Observera att $\omega_d < \omega_n$ dvs. den dämpade svängningsrörelsen svänger långsammare än den odämpade. Den dämpade svängningens periodtid, τ_d , ges av

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{\tau_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.22)$$



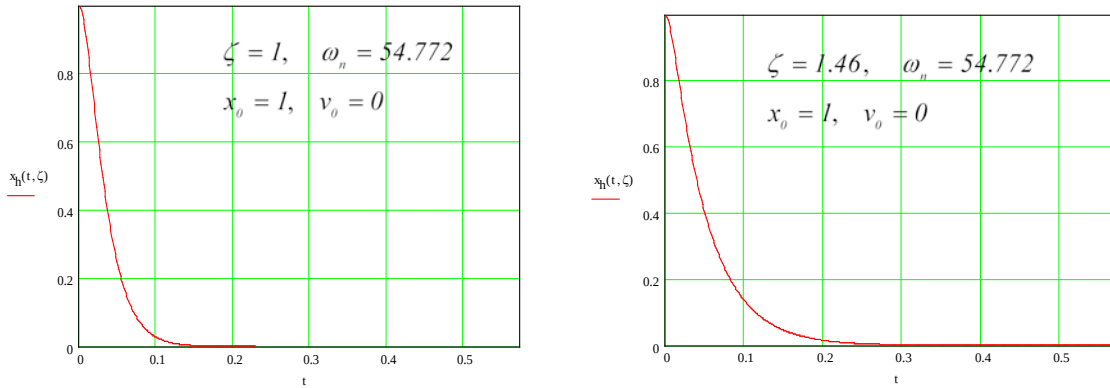
Figur 2.3 Svagt dämpad svängning.

Uppgift 2.3: Skriv lösningen (2.21) på formen

$$x(t) = ae^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (2.23)$$

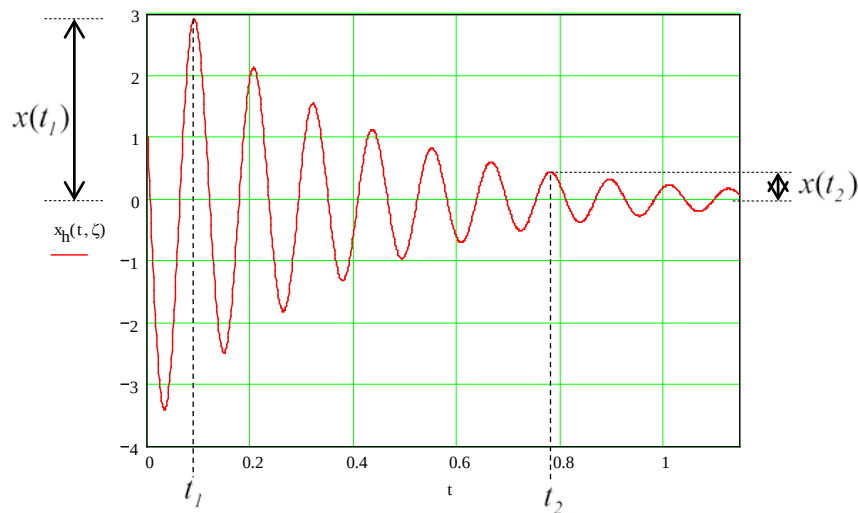
dvs. bestäm a och φ !

I följande grafer ges exempel på kritisk och stark dämpning.



Figur 2.4 Kritisk och stark dämpning.

Hur bestämmer man dämpningsfaktorn ζ för ett svagt dämpat system. Antag att vi har tillgång till tidsförloppet $x = x(t)$, antingen genom en direkt mätning på systemet eller genom en simulering i en modell av systemet, t.ex. i ADAMS. Se figuren nedan!



Figur 2.4 Mätning av relativa dämpningen.

Välj två tidpunkter t_1 och t_2 där $t_2 - t_1 = k\tau_d$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Om vi utnyttjar (2.23) erhålles

$$x_1 = x(t_1) = ae^{-\omega_n \zeta t_1} \sin(\omega_d t_1 + \varphi), \quad x_2 = x(t_2) = ae^{-\omega_n \zeta t_2} \sin(\omega_d t_2 + \varphi) \quad (2.24)$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= e^{\omega_n \zeta (t_2 - t_1)} \frac{\sin(\omega_d t_1 + \varphi)}{\sin(\omega_d t_2 + \varphi)} = e^{\omega_n \zeta k \tau_d} \frac{\sin(\omega_d t_1 + \varphi)}{\sin(\omega_d t_1 + \omega_d k \tau_d + \varphi)} = e^{\omega_n \zeta k \tau_d} \frac{\sin(\omega_d t_1 + \varphi)}{\sin(\omega_d t_1 + \varphi + k2\pi)} = \\ &= e^{\omega_n \zeta k \tau_d} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Detta ger

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n \tau_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.26)$$

där δ är det såkallade *logaritmiska dekrementet*. Detta kan bestämmas genom mätningar i grafen för $x = x(t)$. Ur (2.26) kan vi lösa dämpningsfaktorn som funktion av det logaritmiska dekrementet,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}}}$$

Exempel 2.1 Ur figur 2.4 ovan avläser vi $k = 6$, $x_1 = 2.9$, $x_2 = 0.44$. Detta ger $\delta = 0.314$ och därmed $\zeta = 0.05$.

Sammanfattning (Fria, svagt dämpade svängningar, $0 \leq \zeta < 1$)

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

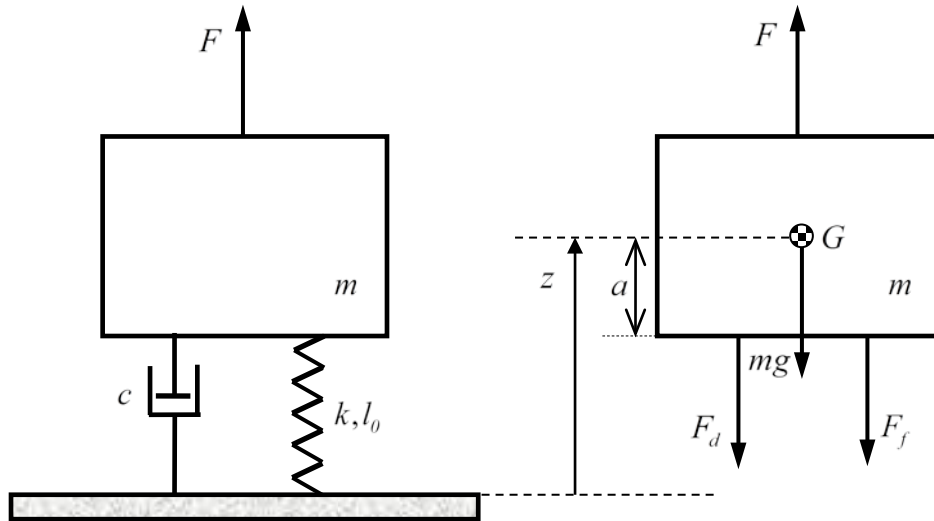
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$x(t) = ae^{-\omega_n\zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_d x_0}{v_0 + \zeta\omega_n x_0}\right), & v_0 + \zeta\omega_n x_0 > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & v_0 + \zeta\omega_n x_0 = 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_d x_0}{v_0 + \zeta\omega_n x_0}\right) + \pi, & v_0 + \zeta\omega_n x_0 < 0 \end{cases}$$

Påtvungade svängningar (12.5)

En maskin med massan m är uppställd på ett fixt fundament via ett fjäder-dämpar system enligt nedanstående figur. Maskinen påverkas, förutom av tyngdkraften, av en yttre kraft $F = F(t)$. Bestäm maskinens rörelse! Vi frilägger maskinen och inför yttre krafter: Fjäderkraften F_f , dämpkraften F_d , tyngdkraften mg och den yttre pådrivande kraften F .



Figur 3.1 Maskin på fjäder-dämpar-system

Kraftekvationen:

$$(\uparrow): -F_d - F_f - mg + F = m\ddot{z} \quad (3.1)$$

där $F_d = c\dot{z}$, $F_f = k(l - l_0)$, där fjäderns aktuella längd $l = z - a$. Således $F_f = k(z - a - l_0)$. Detta ger rörelseekvationen:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + mg - k(a + l_0) = F \quad (3.2)$$

Jämviktsläget $z = z_0$ då $F(t) = 0$ (ingen yttre last) uppfyller, enligt (3.2) ekvationen

$$kz_0 + mg - k(a + l_0) = 0 \Rightarrow z_0 = a + l_0 - \frac{mg}{k} \quad (3.3)$$

Vi inför nu koordinaten $x = z - z_0$, dvs. x är *förskjutningen av maskinen från jämviktsläget*. Ekvation (3.2) kan då skrivas

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \quad (3.4)$$

detta kan skrivas på *normalformen*

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F}{m} \quad (3.5)$$

där $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, $\zeta = \frac{c}{2\omega_nm}$. Vi antar nu att den yttre pådrivande kraften är harmonisk, dvs.

$$F = F_0 \sin \omega t \quad (3.6)$$

där F_0 , kraftens amplitud, och ω , kraftens vinkelfrekvens, är givna konstanter. Observera att ω har inget med egenvinkelfrekvensen ω_n att göra! Ekvationen (3.5) kan nu skrivas

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (3.7)$$

Den allmänna lösningen till (3.7) kan skrivas $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ där $x_h = x_h(t)$ är en lösning till den *homogena differentialekvationen*

$$\ddot{x}_h + 2\zeta \omega_n \dot{x}_h + \omega_n^2 x_h = 0 \quad (3.8)$$

dvs. $x_h = x_h(t)$ är en fri svängning ($F = 0$) som, för fallet svag dämpning ($0 \leq \zeta < 1$), kan skrivas $x_h(t) = ae^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$. Funktionen $x_p = x_p(t)$ är en såkallad *partikulärlösning till differentialekvationen* (3.7), en (någon) funktion som satisfierar (3.7), dvs.

$$\ddot{x}_p + 2\zeta \omega_n \dot{x}_p + \omega_n^2 x_p = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (3.9)$$

För att hitta en lösning till denna differentialekvation ”komplexifierar” vi problemet genom att skriva den yttre pådrivande kraften på formen

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} = F_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (3.10)$$

och studera differentialekvationen

$$\ddot{x}_p + 2\zeta \omega_n \dot{x}_p + \omega_n^2 x_p = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3.11)$$

Vi kommer då att erhålla en complex-värd lösning $x_p = x_p(t)$. Den sökta reella lösningen fås då som imaginärdelen av x_p . Vi ansätter

$$x_p = x_p(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.12)$$

där X är ett komplext tal som vi skall bestämma så att (3.12) blir en lösning till (3.11). Insättning av (3.12) i (3.11) ger, då $\dot{x}_p = i\omega X e^{i\omega t}$ och $\ddot{x}_p = -\omega^2 X e^{i\omega t}$,

$$(\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta \omega \omega_n) X e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3.13)$$

Av detta följer, om $\zeta > 0$, att

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n} \quad (3.14)$$

Observera att nämnaren i (3.14) är lika med $p(i\omega)$ där $p = p(\lambda)$ är det karakteristiska polynomet definierat i (2.12). En (komplex) partikulärlösning till (3.11) ges då av

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n} e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

Den statiska jämviktslösningen till (3.11) som svarar mot en konstant yttre kraft $F(t) = F_0$ fås som ett specialfall av (3.15) genom att sätta $\omega = 0$, dvs.

$$x_{stat} = \frac{F_0}{m\omega_n^2} = \frac{F_0}{k} \quad (3.16)$$

Vi kan då skriva

$$x_p(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n} x_{stat} e^{i\omega t} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} x_{stat} e^{i\omega t} = \frac{1}{1 - \theta^2 + i2\zeta\theta} x_{stat} e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

där *frekvenskvoten* $\theta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Om vi skriver nämnaren i (3.17) på polär form

$$1 - \theta^2 + i2\zeta\theta = \sqrt{(1 - \theta^2)^2 + 4\zeta^2\theta^2} e^{i\phi} \quad (3.18)$$

där vinkelargumentet (fasvinkeln) ϕ ges av

$$\phi = \phi(\theta, \zeta) = \begin{cases} \arctan(\frac{2\zeta\theta}{1 - \theta^2}), & 0 \leq \theta \leq 1 \\ \arctan(\frac{2\zeta\theta}{1 - \theta^2}) + \pi, & \theta > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

kan (3.17) nu skrivas

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} M e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.20)$$

där $M = M(\theta, \zeta)$ är den så kallade *förstoringsfaktorn* definierad av

$$M(\theta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2)^2 + 4\zeta^2\theta^2}}, \quad \theta \geq 0 \quad (3.21)$$

Om vi nu tar imaginärdelen av (3.20) erhålles en partikulärlösning till differentialekvationen (3.7). Denna brukar kallas den av F *påtvungade svängningen* hos systemet,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} M \sin(\omega t - \phi) \quad (3.22)$$

Observera att den påtvungade svängningen har samma frekvens som den yttre pådrivande kraften F . Svängningen "går i takt" med kraften. Amplituden ges av den statiska jämviktslösningen multiplicerad med förstoringsfaktorn. Den allmänna lösningen till differentialekvationen (3.20) kan då skrivas

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underbrace{ae^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi)}_{\text{egensvängning}} + \underbrace{\frac{F_0}{k} M \sin(\omega t - \phi)}_{\text{påtvungad svängning}} \quad (3.23)$$

Den första delen av lösningen representerar systemets egensvängning och den andra delen den påtvungade svängningen. Dessa svänger med frekvenserna ω_d respektive ω och svängningen blir därmed något oregelbunden till att börja med, se figuren nedan! Ibland kallas denna del av rörelsen för den *transienta* delen. Lösningen innehåller två godtyckliga konstanter a och φ som kan anpassas till begynnelsedata. Observera att även om $x(0) = x_0 = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 = 0$ så kommer bidrag från egensvängningen att finnas med i lösningen. Egensvängningen dämpas ut via exponential-funktionen och blir efter en viss tid försumbar. Efter denna tid domineras lösningen av den påtvungade svängningen och denna del brukar benämnas *fortfarighetstillstånd*. Se figuren nedan!

Vad händer med lösningen (3.23) om dämpningen är lika med noll, dvs. om $\zeta = 0$? Vi får då lösningen

$$x(t) = a \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0}{k} M \sin(\omega t - \phi) \quad (3.24)$$

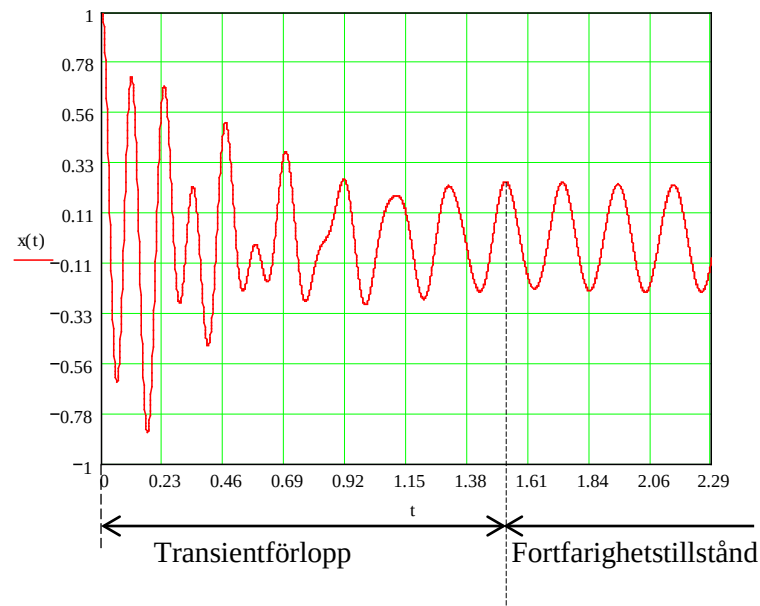
där förstoringsfaktorn M ges av

$$M(\theta) = \frac{1}{|1 - \theta^2|}, \quad \theta \neq 0 \quad (3.25)$$

och fasvinkeln $\phi = \frac{\pi}{2}$ vilket ger lösningen

$$x(t) = a \sin(\omega_n t + \phi) - \frac{F_0}{k} \frac{1}{|1 - \theta^2|} \cos \omega t \quad (3.26)$$

Observera att i detta fall har vi inget transientförlopp. Egensvängningarna är odämpade och bidrar fullt ut som en del av lösningen för alla tider. Notera också att när $\theta \rightarrow 1$, dvs. när $\omega \rightarrow \omega_n$ så gäller att $x(t) \rightarrow \infty$ för alla tider. Detta fenomen benämnes *resonans*.



Figur 3.2 Den påtvingade svängningen.

För förstöringsfaktorn $M = M(\theta, \zeta)$ gäller, enligt (3.21), att $M(0, \zeta) = 1$ för alla $\zeta \geq 0$ och $\lim_{\theta \rightarrow \infty} M(\theta, \zeta) = 0$ för alla $\zeta \geq 0$. Om $0 \leq \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ så har förstöringsfaktorn ett maxvärde

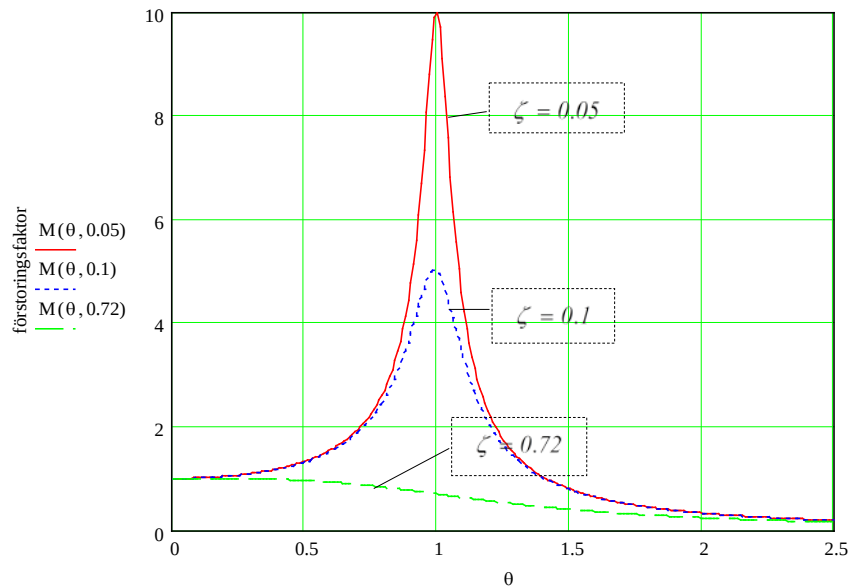
$M_{\max}$ som antas för $\theta = \theta_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Motsvarande vinkelfrekvens

$$\omega_{\text{res}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.27)$$

kallas *resonansvinkelfrekvensen*. Vid denna frekvens är således förstöringsfaktorn som störst under förutsättning att $0 \leq \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$M_{\max} = M(\theta_{\text{res}}, \zeta) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.28)$$

Om $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ så är $M = M(\theta, \zeta)$ en monotont avtagande funktion av θ , dvs $M_{\max} = M(0, \zeta) = 1$. I figuren nedan visas grafer för förstöringsfaktorn för de relativa dämpningarna $\zeta = 0.05$, $\zeta = 0.1$ och $\zeta = 0.72$, respektive.



Figur 3.3 Förstöringsfaktorn.

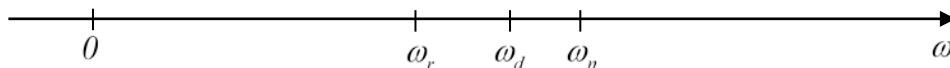
Vi konstaterar att $\zeta = 0.05 \Rightarrow M_{\max} \cong 10$, $\zeta = 0.1 \Rightarrow M_{\max} \cong 5$ och $\zeta = 0.72 \Rightarrow M_{\max} = 1$. Se figuren ovan.

Vi kan nu identifiera tre *viktiga frekvenser* som hör till ett svängande system:

ω_n : (naturlig) egenvinkelfrekvens

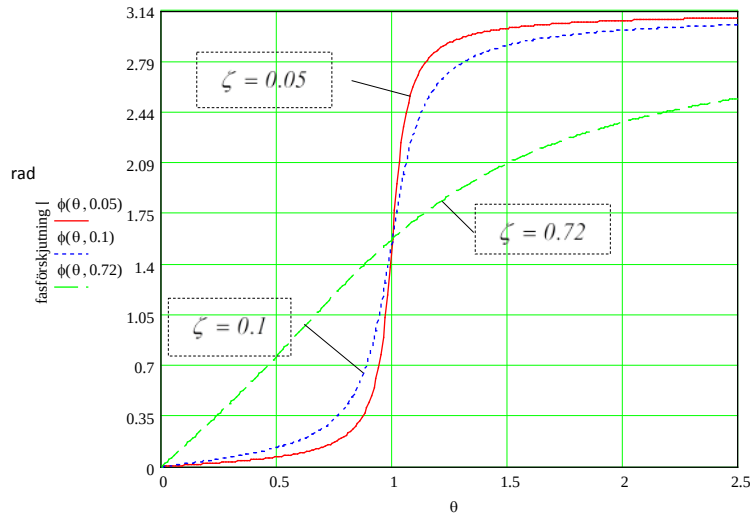
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$: dämpad egenvinkelfrekvens

$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$: resonansegevinkelfrekvens



Om $\zeta \ll 1$ så gäller $\omega_r \cong \omega_d \cong \omega_n$ och $M_{\max} \cong \frac{1}{2\zeta}$.

För fasförskjutningen $\phi = \phi(\theta, \zeta)$ gäller, enligt (3.19), $\phi(0, \zeta) = 0$ för alla $\zeta \geq 0$, $\phi(1, \zeta) = \frac{\pi}{2}$ för alla $\zeta \geq 0$ och $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \phi(\theta, \zeta) = \pi$ för alla $\zeta \geq 0$. I figuren nedan visas grafer för fasförskjutningen för de relativa dämpningarna $\zeta = 0.05$, $\zeta = 0.1$ och $\zeta = 0.72$, respektive.

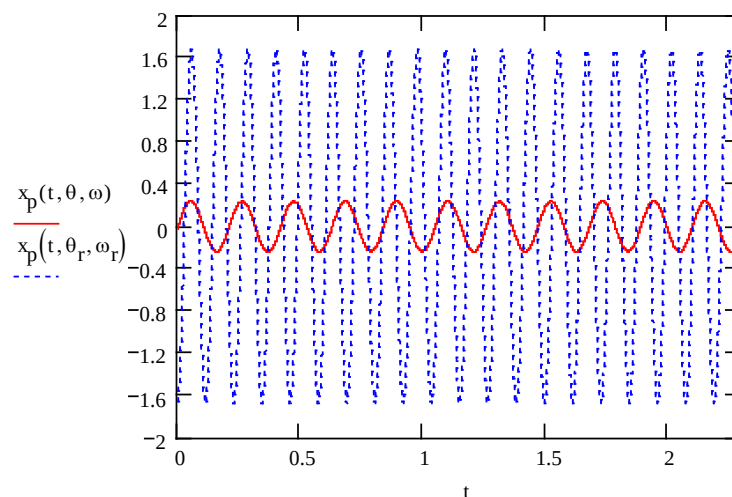


Figur 3.4 Fasvinkeln.

Exempel 3.1 Den påtvingade svängningen ges av

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} M \sin(\omega t - \phi)$$

Med förutsättningarna $m = 1.0 \text{ kg}$, $k = 3000 \text{ Nm}^{-1}$, $\zeta = 0.05$, $F_0 = 500 \text{ N}$, $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$ erhålles $\omega_n = 54.7 \text{ rad s}^{-1}$ och därmed $\theta = 0.55$. I nedanstående figur visas de påtvingade svängningarna för $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$ och $\omega = \omega_r = 54.6 \text{ rad s}^{-1} \cong \omega_{res}$ svarande mot resonans. För detta fall gäller $M_{\max} \cong 10$.



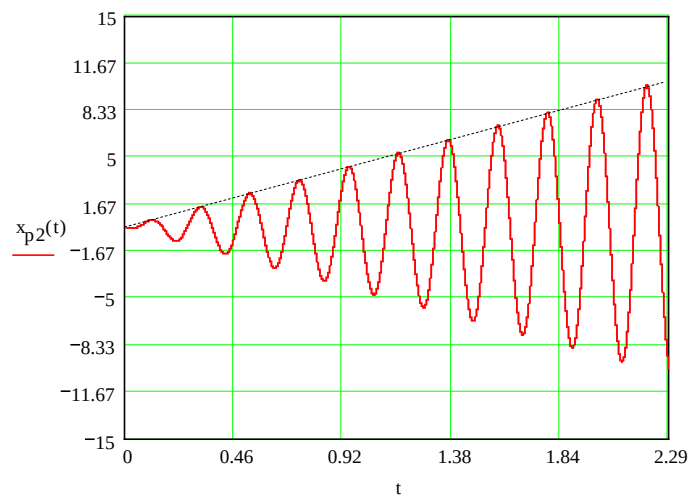
Figur 3.5 Påtvingad svängning.

Den lösning vi hittills studerat fungerar ej om $\zeta = 0$ och $\theta = 1$, se (3.26). Hur ser då lösningen ut i detta fall?

Uppgift 2.4: Visa att om $\zeta = 0$ och $\omega = \omega_n$ så är

$$x_p(t) = -\frac{1}{2} \frac{F_0}{k} \omega_n t \cos \omega_n t$$

den påtvingade svängningen, dvs. en lösning till (3.9). Notera att amplituden växer proportionellt mot tiden och över alla gränser. Typiskt för resonans vid odämpade svängningar.



Figur 3.6 Påtvingad svängning i fallet $\zeta = 0$ och $\omega = \omega_n$.

Uppgift 2.5: Studera Exempel 12.8 i Grundkursboken!

Sammanfattning (Påtvungade svängningar) $0 \leq \zeta < 1$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$x_p(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} M\left(\frac{\omega}{\omega_n}, \zeta\right) \sin(\omega t - \phi(\frac{\omega}{\omega_n}, \zeta)), & \zeta > 0 \\ -\frac{F_0}{k} \frac{1}{\left|1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right|} \cos \omega t, & \zeta = 0, \omega \neq \omega_n \\ -\frac{1}{2} \frac{F_0}{k} \omega_n t \cos \omega_n t, & \zeta = 0, \omega = \omega_n \end{cases}$$

där

$$M(\theta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2)^2 + 4\zeta^2 \theta^2}}, \quad \theta \geq 0$$

och

$$\phi = \phi(\theta, \zeta) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\zeta\theta}{1 - \theta^2}\right), & 0 \leq \theta \leq 1 \\ \arctan\left(\frac{2\zeta\theta}{1 - \theta^2}\right) + \pi, & \theta > 1 \end{cases}$$