LUND
UNIVERSITY
Mekanik, LTH

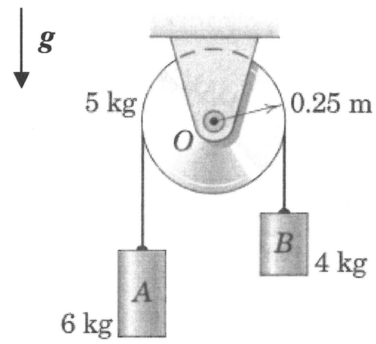
Dugga 3 i Mekanik, grundkurs för I 2/3 -2020

Skrivningen består av 3 uppgifter. Införda storheter och beteckningar skall definieras (och eventuellt markeras i figur). Uppställda ekvationer motiveras. Räkningarna skall redovisas i den omfattningen att de lätt kan följas. Varje tal ger maximalt 5 poäng, det vill säga totalt maximalt 15 poäng

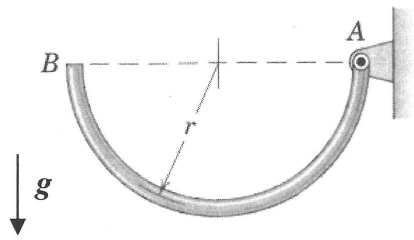
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i Mekanik, gymnasieformelsamling samt miniräknare.

Uppgift 1
En jämntjock skiva med massan $m = 5$ kg och radien $r = 0.25$ m är friktionsfritt lagrad i O. Över skivan ligger ett rep som antas inte glida mot skivan och i repets ändar är två massor på 4 kg och 6 kg respektive, fastsatta. Om systemet släpps från vila vad blir:

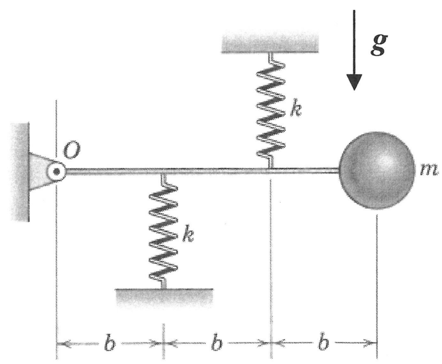
a) Skivans vinkelacceleration.
b) Skivans vinkelhastighet som funktion av tiden.
c) Skivans vinkelhastighet som funktion av vridningsvinkeln.



Uppgift 2
En smal enhetlig balk med massan m, i form av en halvcirkel med radien r, är friktionsfritt lagrad i A. Balken släpps från vila i läget som visas då AB är horisontell. Beräkna vinkelaccelerationen för balken och krafterna vid infästningen vid A direkt efter att den släppts.



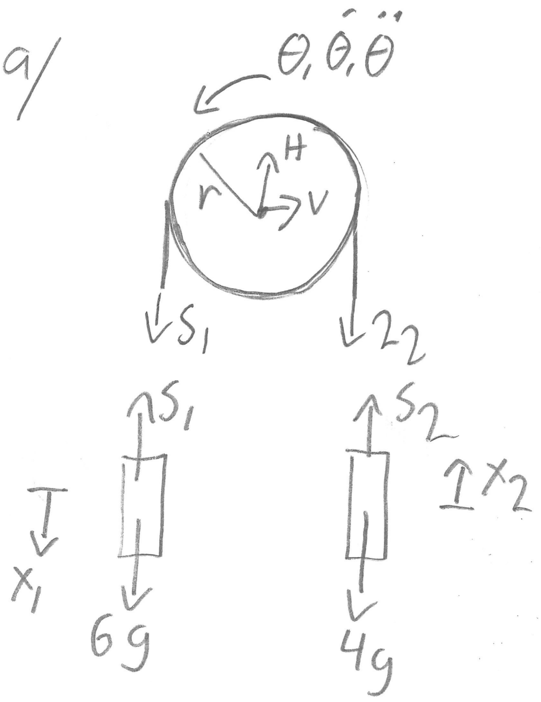
Uppgift 3
En tunn lätt stång med längden $3b$ är friktionsfritt lagrad i O. I den andra änden av stången är ett litet klot med massan m fastsatt. Stången sitter också fast med två fjädrar, med fjäderkonstanten k, vilka håller stången i ett horisontellt jämviktsläge. Bestäm svängningstiden för systemet för små svängningar kring detta läge.



1

Frilässning

a/



$I_0 = \frac{m_{skiva} \cdot r^2}{2} = \frac{5r^2}{2}$

$x_1 = x_2$; $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$;

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = r\ddot{\theta}$

skivan : $M_0 = \dot{H}_0 = I_0 \ddot{\theta}$, $S_1 r - S_2 r = I_0 \ddot{\theta}$ (1)

6kg : $\downarrow$ $6g - S_1 = 6\ddot{x}_1$ $\Rightarrow S_1 = 6(g - r\ddot{\theta})$ (2)

4kg : $\uparrow$ $-4g + S_2 = 4\ddot{x}_2$ $\Rightarrow S_2 = 4(g + r\ddot{\theta})$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{4g}{25r} = \underline{6{,}28 \text{ rad/s}^2}$

b/ $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$; $d\dot{\theta} = \ddot{\theta} dt$; $\int_0^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \int_0^t \ddot{\theta} dt$

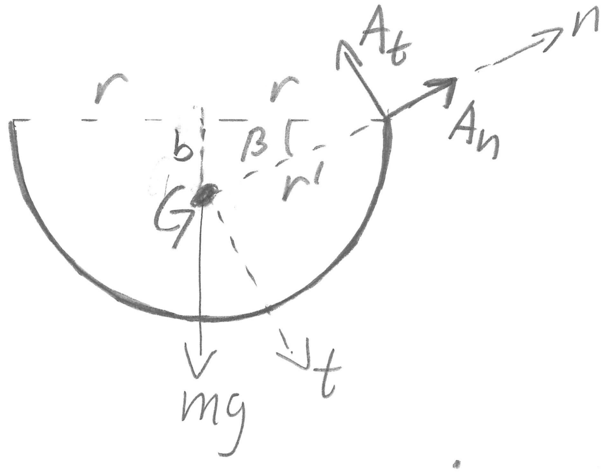
$\dot{\theta} = 6{,}28 \cdot t$ rad/s

c/ $\dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta$

$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} 6{,}28 \, d\theta$

$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = 6{,}28\,\theta \Rightarrow \underline{\dot{\theta} = \sqrt{12{,}56\,\theta}}$ rad/s

2 Frilässning



$$\begin{cases} I_A = \frac{1}{2}(2mr^2 + 2mr^2) = 2mr^2 \\ b = \frac{2r}{\pi} \quad \text{(enl. fs.)} \\ r' = \sqrt{r^2+b^2} = r\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}} \\ \sin\beta = \frac{b}{r'} \;, \quad \cos\beta = \frac{r}{r'} \end{cases}$$

Moment ekv: $M_A = \dot{H}_A = I_A\ddot{\theta}$; $mgr = 2mr^2\ddot{\theta}$ (1)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{g}{2r}}}$$

Kraftekv: $\nearrow$ $A_n - mg\sin\beta = ma_n = 0$ (pga $\dot{\theta} = 0$) (2)

$\searrow$ $mg\cos\beta - A_t = ma_t = mr'\ddot{\theta}$ (3)

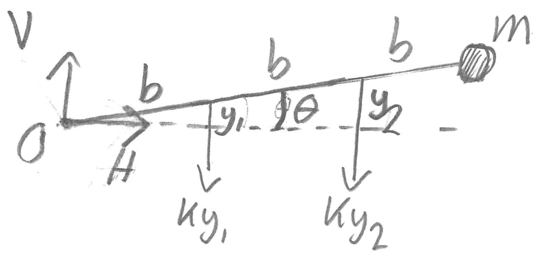
(2) $\Rightarrow$ $A_n = mg\sin\beta = \underline{\underline{mg\frac{b}{r'}}}$

(3) $\Rightarrow$ $A_t = mg\cos\beta - mr'\ddot{\theta} = mg\frac{r}{r'} - mr'\frac{g}{2r} = \underline{\underline{mg\left(\frac{r}{r'} - \frac{r'}{2r}\right)}}$

där $\begin{cases} r' = r\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}} \\ b = \frac{2r}{\pi} \end{cases}$

③ Utgår ifrån jmv-läget, bortse från statiska krafter

Frilässning, små θ



$\curvearrowleft O: \; -b\cos\theta\, ky_1 - 2b\cos\theta\, ky_2 = I_O\ddot{\theta} = m(3b)^2\ddot{\theta}$

$y_1 = b\sin\theta, \quad y_2 = 2b\sin\theta$

$-(b\cos\theta)(kb\sin\theta) - (2b\cos\theta)(k2b\sin\theta) = m(3b)^2\ddot{\theta}$

$\sin\theta \approx \theta, \; \cos\theta \approx 1 \Rightarrow$

$-b^2k\theta - 4b^2\theta = 9mb^2\ddot{\theta}$

$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{5k}{9m}\theta = 0}$ jmf $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{5k}{9m}}$; $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{6\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}}}$