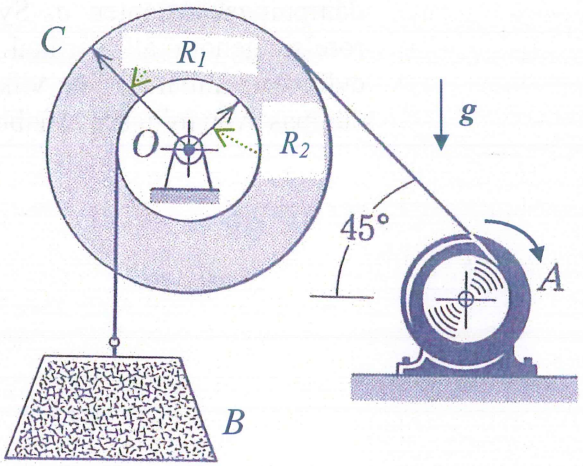
Tentamen i Mekanik, FMEA15 del 2

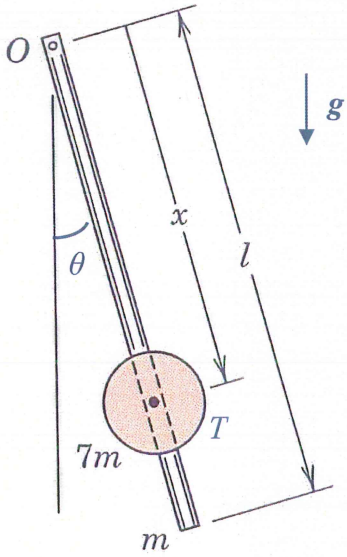
Måndagen den 14 augusti, kl. 08.00 - 12.00, 2017

Lösningarna ska motiveras med ekvationer och figurer. Tillåtet hjälpmedel: formelsamling.
Svar kan avges i sifferform eller uttryckt i ingående storheter. Det är tillåtet att ge givna siffervärden samt långa uttryck egna bokstavsbeteckningar om dessa redovisas tydligt i lösningen.

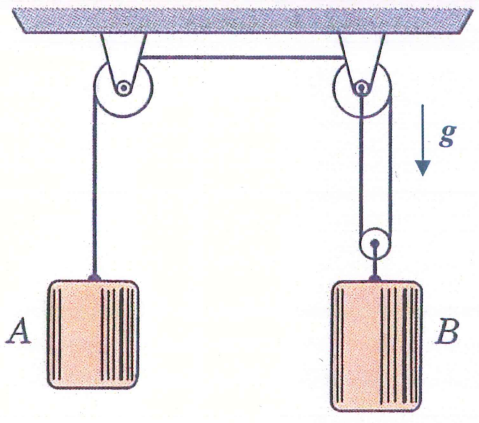
1. Ett cementblock B med massan m_B är fäst vid en lätt, lättböjlig och oelastisk lina, som i sin tur är fäst vid ett hjul C. Hjulet, som kan rotera friktionsfritt kring axeln O, består av en yttre del med radien R_1 och en inre del med radien R_2. De båda delarna är sammansvetsade med varandra och har den totala massan m_C och en total tröghetsradie k_C. Ytterligare en lina är fäst mellan hjulet C och en motor A. Motorn A genererar en rotation hos hjulet C på ett sådant sätt att spännkraften i linan mellan C och A har det konstanta värdet P. Bestäm cementblock B:s acceleration, samt reaktionskrafterna på hjulet C vid axeln O.



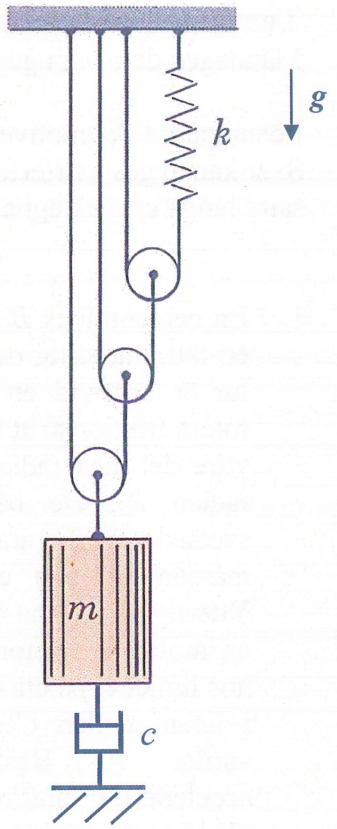
2. En klockpendel består av en homogen och smal stång med längden l och en extra tyngd T, som är fastsvetsad vid stången på avståndet x från rotationsaxeln O. Tyngden T har formen av en homogen, cylinderformad och tunn platta med radien R. Stångens massa är m och tyngden T:s massa är $7m$. Beräkna klockpendelns periodtid för små svängningar kring O. Försumma friktionen.



3. Två cylindrar med massan m_A respektive m_B är upphängda i en lätt, lättböjlig och oelastisk lina som löper över tre trissor. De båda översta trissorna kan approximeras som cylindrar, vardera med massan m_T och radien r_T, medan den undre trissan har försumbar massa. Systemet släpps från vila och all friktion är försumbar. Bestäm accelerationen för A respektive B.

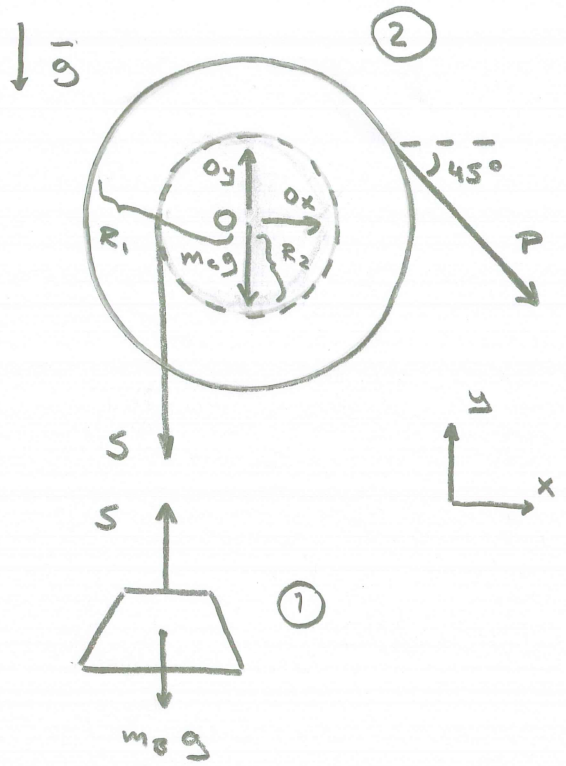


4. En cylinder med massan m är upphängd i en anordning av linor och lätta, lättrörliga trissor enligt vidstående figur. En av linorna är elastisk och töjbar, vilket modelleras med en linjär fjäder med fjäderkonstanten k. Övriga linor är lätta, lättböjliga och otänjbara. Cylindern är även fäst vid en linjär dämpare med dämpningskonstanten c. Systemet sätts i rörelse genom att vertikal svängning av cylindern initieras. För vilket värde på c dämpas svängningarna snabbast?



1]

- Frilägg:



- Massa cementblock: m_B
- Massa hjul: m_c
- Tröghetsradie hjul: k_c
- Yttre hjulradie: R_1
- Inre hjulradie: R_2
- Konstant spännkraft: P
- Försumma friktion
- Bestäm cementblock B:s acceleration samt reaktionskrafterna på hjulet C vid O.

- Kraft- och momentekvationer:

① $\quad \Sigma F_y = m a_{Gy} \qquad S - m_B g = m_B \ddot{y}_B \qquad (1)$

②

$$\Sigma F_x = m a_{Gx} \qquad P\cos 45° + O_x = m_c \ddot{x}_c \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = m a_{Gy} \qquad O_y - m_c g - P\sin 45° - S = m_c \ddot{y}_c \qquad (3)$$

$$\Sigma M_O = I_O \alpha \qquad P \cdot R_1 - S \cdot R_2 = I_O \alpha \qquad (4)$$

Här gäller att $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = 0$

- Tröghetsmoment:

$$I_O = m_c k_c^2 \qquad (5)$$

- Förhållande mellan acceleration och vinkelacceleration:

$$\ddot{y}_B = R_2 \alpha \qquad (6)$$

1]

- Insättning ger:

(1) + (6) $\Rightarrow$ $S = m_B R_2 \alpha + m_B g$ insatt i (4) + (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P \cdot R_1 = m_B R_2^2 \alpha + m_B g R_2 + m_c k_c^2 \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P \cdot R_1 = \left[m_B R_2^2 + m_c k_c^2 \right] \alpha + m_B g R_2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha = \dfrac{P \cdot R_1 - m_B g R_2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2}$ insatt i (6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\ddot{y}_B = \dfrac{P \cdot R_1 \cdot R_2 - m_B g R_2^2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2}$ insatt i (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S = \dfrac{m_B \cdot P \cdot R_1 \cdot R_2 - m_B^2 g R_2^2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2} + m_B g$ insatt i (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $O_y = \dfrac{P}{\sqrt{2}} + m_c g + \dfrac{m_B P R_1 R_2 - m_B^2 g R_2^2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2} + m_B g$

(2) $\Rightarrow$ $O_x = -\dfrac{P}{\sqrt{2}}$

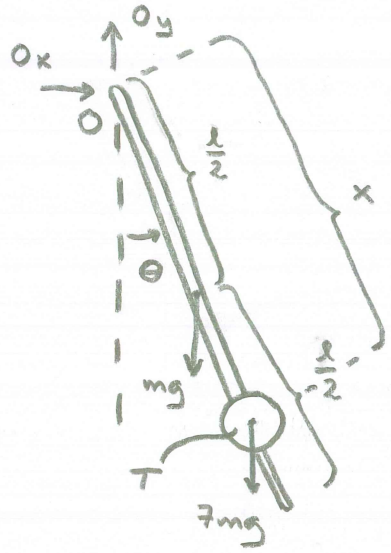
Svar: $\ddot{y}_B = \dfrac{P R_1 R_2 - m_B g R_2^2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2}$, $O_x = -\dfrac{P}{\sqrt{2}}$

$$O_y = \frac{P}{\sqrt{2}} + \frac{m_B P R_1 R_2 - m_B^2 g R_2^2}{m_B R_2^2 + m_c k_c^2} + m_B g + m_c g$$

2]

- Homogen, smal stång
- Massa stång: m
- Homogen platt cylinder tyngd
- Massa tyngd: $7m$
- Radie tyngd T: R
- Små svängningar
- Bestäm periodtiden

- Frilägg:



- Momentekvation med avseende på O:

$$\Sigma M_O = I_O \ddot{\theta} \qquad -mg\frac{l}{2}\sin\theta - 7mgx\sin\theta = I_O\ddot{\theta} \qquad (1)$$

- Tröghetsmoment med avseende på O:

$$I_O = \frac{ml^2}{3} + \left[\frac{7mR^2}{2} + 7mx^2\right] \qquad (2)$$

- Insättning ger:

$$(1) \text{ och } (2) \Rightarrow \quad -mg\frac{l}{2}\sin\theta - 7mgx\sin\theta = \left\{\frac{ml^2}{3} + \frac{7mR^2}{2} + 7mx^2\right]\ddot{\theta}$$

- Omskrivning samt små svängningar:

$$\ddot{\theta} + \frac{g\left[\frac{l}{2} + 7x\right]}{\left[\frac{l^2}{3} + \frac{7R^2}{2} + 7x^2\right]}\theta = 0$$

2)

- Jämför med standardekvationen:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{g\left[\frac{l}{2} + 7x\right]}{\left[\frac{l^2}{3} + \frac{7R^2}{2} + 7x^2\right]}}$$

- Periodtid:

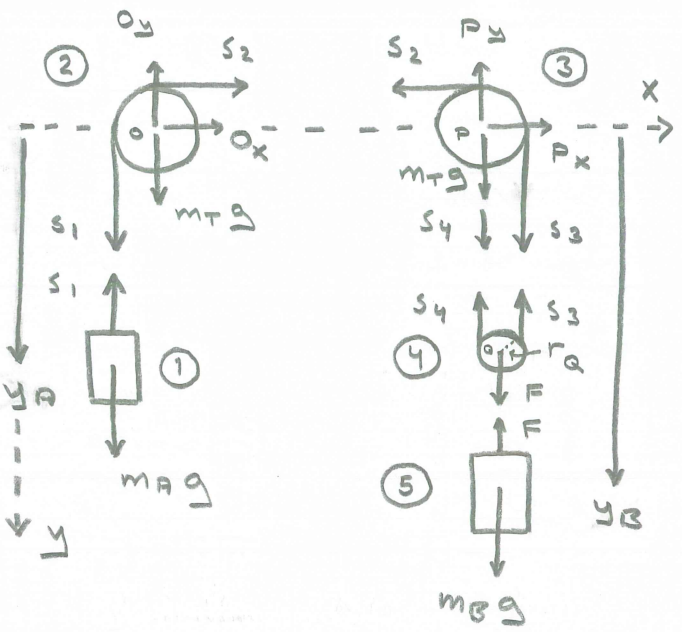
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{\left[\frac{l^2}{3} + \frac{7R^2}{2} + 7x^2\right]}{g\left[\frac{l}{2} + 7x\right]}}$$

Svar: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{3} + \frac{7R^2}{2} + 7x^2}{g\left[\frac{l}{2} + 7x\right]}}$

3

- Massa A: m_A
- Massa B: m_B
- Massa övre trissor: m_T
- Försumbar massa nedre trissan
- Radie övre trissor: r_T
- Betrakta övre trissor som cylindrar
- Startar i vila
- Bestäm accelerationen för A respektive B

- Frilägg:



- Kraft- och momentekvationer:

① $\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad m_A g - S_1 = m_A \ddot{y}_A$ (1)

② $\Sigma M_O = I_O \alpha_O$ $\quad S_2 \cdot r_T - S_1 \cdot r_T = I_O \alpha_O$ (2)

③ $\Sigma M_P = I_P \alpha_P$ $\quad S_3 \cdot r_T - S_2 \cdot r_T = I_P \alpha_P$ (3)

④ $\Sigma M_Q = I_Q \alpha_Q$ $\quad S_4 \cdot r_Q - S_3 \cdot r_Q = 0 \cdot \alpha_Q$ (4)

$\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad F - S_3 - S_4 = 0 \cdot a_{Qy}$ (5)

⑤ $\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad m_B g - F = m_B \ddot{y}_B$ (6)

- Linans längd är konstant:

$$L = y_A + 2 y_B + \mathbb{C} \Rightarrow 0 = \ddot{y}_A + 2 \ddot{y}_B + 0 \quad (7)$$

3]

- Förhållande mellan acceleration och vinkelacceleration:

$$\ddot{y}_A = -\alpha_0 r_T \qquad (8)$$

$$\alpha_P = \alpha_0 \qquad (9)$$

- Tröghetsmoment:

Ur formelsamling: $I_0 = I_P = \frac{m_T r_T^2}{2}$ (10)

- Insättning ger:

(4) ⇒ $S_4 = S_3$ insatt; (5) ⇒ $F = 2S_3$ insatt; (6) ⇒

⇒ $m_B g - 2S_3 = m_B \ddot{y}_B$ i kombination med (7) ⇒

⇒ $m_B g - 2S_3 = -\frac{m_B \ddot{y}_A}{2}$ [1]

(2) ⇒ $S_1 = S_2 - \frac{I_0 \alpha_0}{r_T}$ i kombination med (8) och (10) ⇒

⇒ $S_1 = S_2 + \frac{m_T r_T^2}{2 r_T} \frac{\ddot{y}_A}{r_T} = S_2 + \frac{m_T \ddot{y}_A}{2}$ [2]

(3) ⇒ $S_3 = S_2 + \frac{I_P \alpha_P}{r_T}$ i kombination med (8), (9) och (10) ⇒

⇒ $S_3 = S_2 - \frac{m_T r_T^2}{2 r_T} \frac{\ddot{y}_A}{r_T} = S_2 - \frac{m_T \ddot{y}_A}{2}$ [3]

(1) i kombination med [2] ⇒ $m_A g - S_2 - m_T \frac{\ddot{y}_A}{2} = m_A \ddot{y}_A$ ⇒

⇒ $S_2 = m_A g - \frac{m_T \ddot{y}_A}{2} - m_A \ddot{y}_A$ [4]

3]

[1] i kombination med [3] ⇒

$$\Rightarrow \quad m_B g - 2S_2 + \frac{2 m_T \ddot{y}_A}{2} = -\frac{m_B \ddot{y}_A}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_T \ddot{y}_A}{2} + \frac{m_B \ddot{y}_A}{4} \qquad [5]$$

[4] i kombination med [5] ⇒

$$\Rightarrow \quad m_A g - \frac{m_T \ddot{y}_A}{2} - m_A \ddot{y}_A = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_T \ddot{y}_A}{2} + \frac{m_B \ddot{y}_A}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y}_A \left(\frac{m_T}{2} + \frac{m_B}{4} + \frac{m_T}{2} + m_A \right) = m_A g - \frac{m_B g}{2} \quad \Rightarrow$$

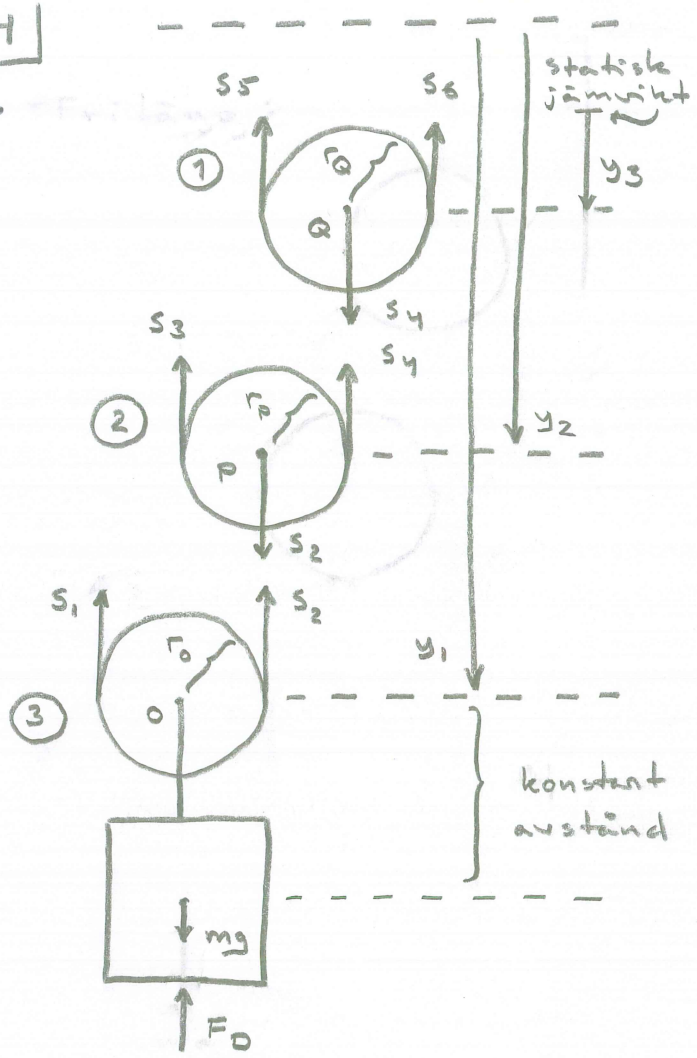
$$\Rightarrow \quad \ddot{y}_A = \frac{m_A g - \frac{m_B g}{2}}{\left(m_A + m_T + \frac{m_B}{4} \right)} \qquad \text{: kombination med (7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y}_B = \frac{\frac{m_B g}{4} - \frac{m_A g}{2}}{m_A + m_T + \frac{m_B}{4}}$$

Svar: $\ddot{y}_A = \left(\frac{m_A - \frac{m_B}{2}}{m_A + m_T + \frac{m_B}{4}} \right) g$

$$\ddot{y}_B = \left(\frac{\frac{m_B}{4} - \frac{m_A}{2}}{m_A + m_T + \frac{m_B}{4}} \right) g$$

4



- Massa: m
- Lätta och lättrörliga trissor
- Linjär fjäder, fjäderkonstant: k
- Linjär dämpare, dämpningskonstant: c
- För vilket värde på c sker snabbast dämpning?

- Kraft- och momentekvationer:

① $\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad S_4 - S_5 - S_6 = 0 \cdot \ddot{y}_3$ (1)

$\Sigma M_Q = I_Q \alpha_Q$ $\quad S_6 \cdot r_Q - S_5 \cdot r_Q = 0 \cdot \alpha_Q$ (2)

② $\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad S_2 - S_4 - S_3 = 0 \cdot \ddot{y}_2$ (3)

$\Sigma M_P = I_P \alpha_P$ $\quad S_4 \cdot r_P - S_3 \cdot r_P = 0 \cdot \alpha_P$ (4)

③ $\Sigma F_y = m a_{Gy}$ $\quad mg - S_1 - S_2 - F_D = m \ddot{y}_1$ (5)

$\Sigma M_O = I_O \alpha_O$ $\quad S_1 \cdot r_O - S_2 \cdot r_O = 0 \cdot \alpha_O$ (6)

- Fjäderkraft:

$$S_6 = 2k y_3 - \underbrace{S_{6\,jmv.}}_{\text{spännkraft vid statiskt jämviktläge, konstant}} \quad (7)$$

4

- Dämpar kraft:

$$F_D = c\,\dot{y}_1 \tag{8}$$

- Förhållande mellan sträckor:

$$y_2 = \frac{y_3}{2} + \mathbb{C}_1 \quad , \text{ där } \mathbb{C}_1 \text{ är konstant} \tag{9}$$

$$y_1 = \frac{y_2}{2} + \mathbb{C}_2 \quad , \text{ där } \mathbb{C}_2 \text{ är konstant} \tag{10}$$

- Förhållande mellan hastigheter:

$$\dot{y}_2 = \frac{\dot{y}_3}{2} \tag{11}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{\dot{y}_2}{2} \tag{12}$$

- Förhållande mellan accelerationer:

$$\ddot{y}_2 = \frac{\ddot{y}_3}{2} \tag{13}$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{\ddot{y}_2}{2} \tag{14}$$

- Insättning ger:

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \quad s_5 = s_6 \quad \text{insatt i } (1) \Rightarrow \quad s_4 = 2s_6 \\ (4) \Rightarrow \quad s_3 = s_4 \quad \text{insatt i } (3) \Rightarrow \quad s_2 = 2s_4 \end{array}\right\} \Rightarrow s_2 = 4s_6$$

Insatt i (5) i kombination med (6) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad mg - 8s_6 - F_D = m\ddot{y}_1$$

4]

Kombinera med (7) och (8) ⇒

$$mg - 8(2ky_3 - S_{6jmv.}) - c\dot{y}_1 = m\ddot{y}_1$$

Kombinera även med (9) och (10) ⇒

$$mg - 16k\left[4y_1 - 4C_2 - 2C_1\right] - 8S_{6jmv.} - c\dot{y}_1 = m\ddot{y}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_1 + \frac{c}{m}\dot{y}_1 + \frac{64k}{m}y_1 = \underbrace{\frac{mg + 64C_2 + 32C_1 - 8S_{6jmv.}}{m}}_{\text{Konstant}}$$

- Jämför med standardekvation:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = (F_0/m)\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \quad \text{och} \quad \frac{64k}{m} = \omega_n^2$$

Snabbast dämpning då $\xi = 1$ ⇒

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{64k}{m}} = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 8\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \cdot m = c = 16\sqrt{km}$$

Svar: $c = 16\sqrt{km}$