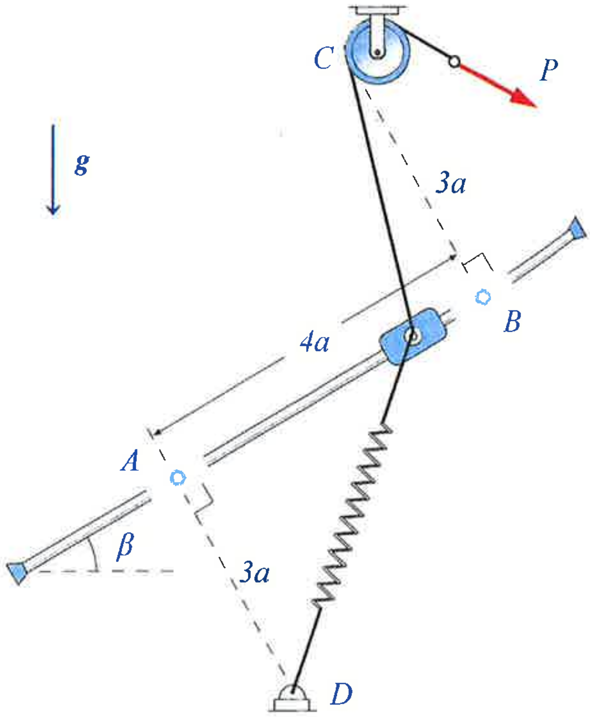
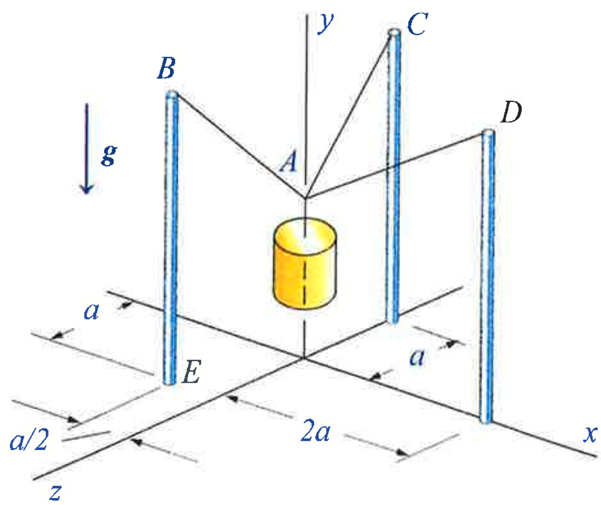
Tentamen i Mekanik, FMEA05 och FMEA15 del 1
Måndagen den 18 mars, kl. 08.00 - 13.00, 2019

Lösningarna ska motiveras med ekvationer och figurer. Tillåtet hjälpmedel: formelsamling.
Svar kan avges i sifferform eller uttryckt i ingående storheter. Det är tillåtet att ge givna siffervärden samt långa uttryck egna bokstavsbeteckningar om dessa redovisas tydligt i lösningen.

1. En liten hylsa med massan m kan glida på en glatt stång som lutar en vinkel β mot horisontalplanet. Hylsan är fäst i en lätt linjär fjäder med den naturliga längden $3a$ och fjäderkonstanten k. Hylsan är också fäst i en lätt, oelastisk och fullständigt böjlig lina som går runt en liten, lätt och lättrörlig trissa vid C på avståndet $3a$ från stången (se vidstående figur). En konstant kraft P verkar i den andra änden av linan. Hylsans rörelse startar från vila i A. Hela systemet ligger i ett vertikalplan. Hur stor ska kraften P vara för att hylsan ska nå punkten B på ett sådant sätt att farten vid B är noll?

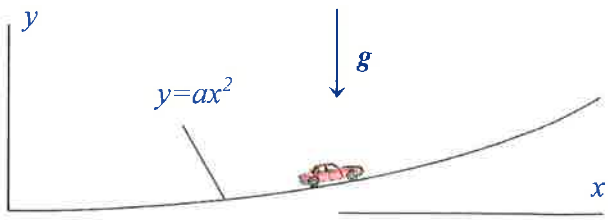


2. En cylinder med massan m är upphängd med hjälp av tre lätta, oelastiska och lättböjliga linor (se vidstående figur). Linorna är i sin tur fästa vid tre lätta stolpar som vardera har höjden $2a$. Koordinaten för punkten A där de tre linorna möts är: $(0,3a/2,0)$. Beräkna reaktionskrafter och reaktionsmoment vid punkten E vid statisk jämvikt. Stolparna kan betraktas som fastsvetsade vid marken. Svara på vektorform.

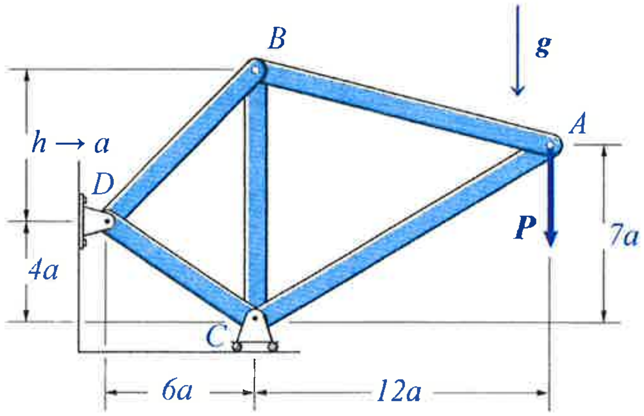


3. En bakhjulsdriven bil med massan m kör uppför en backe som beskrivs av $y = ax^2$. Rörelsen sker i ett vertikalplan. Bilens fart är konstant, $v = v_0$. Vid läget $x = b$, hur stor är den totala friktionskraften respektive normalkraften som verkar på bilen? Använd inte:

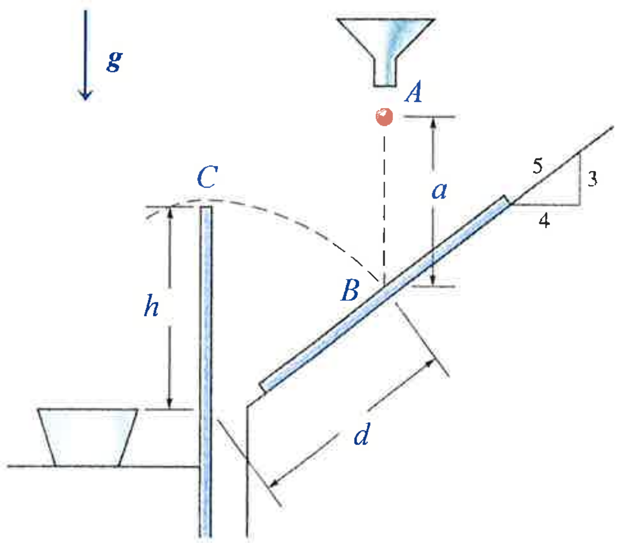
$$\boxed{\rho = ((1+y'^2)^{3/2})/\,|y''|}$$



4. Ett fackverk befinner sig i statisk jämvikt och belastas av en kraft P. I vidstående figur antar designvariabeln h värdet a. Redovisa de ekvationer som krävs för att räkna ut samtliga stångkrafter (2.5 poäng). Inför gärna egna namngivna vinklar i en tydlig figur och referera till dessa i de uppställda ekvationerna. Beräkning av vinklarnas respektive storlek kan redovisas separat. Identifiera även vilken stång som utsätts för den största tryckkraften (0.5 poäng).



5. Innan ett lingon används i sylt undersöks dess kvalitet genom ett stöttest. Det aktuella studstalet är $e = 4/5$. Lingonet släpps från vila i A och anses ha tillräckligt god kvalitet om det efter stöt passerar över barriären vid C. Bestäm storleken på d respektive h för att ett bär som släpps från vila i A precis passerar vid C. Explicita svar behöver inte anges, det är tillräckligt att redovisa nödvändiga ekvationer.

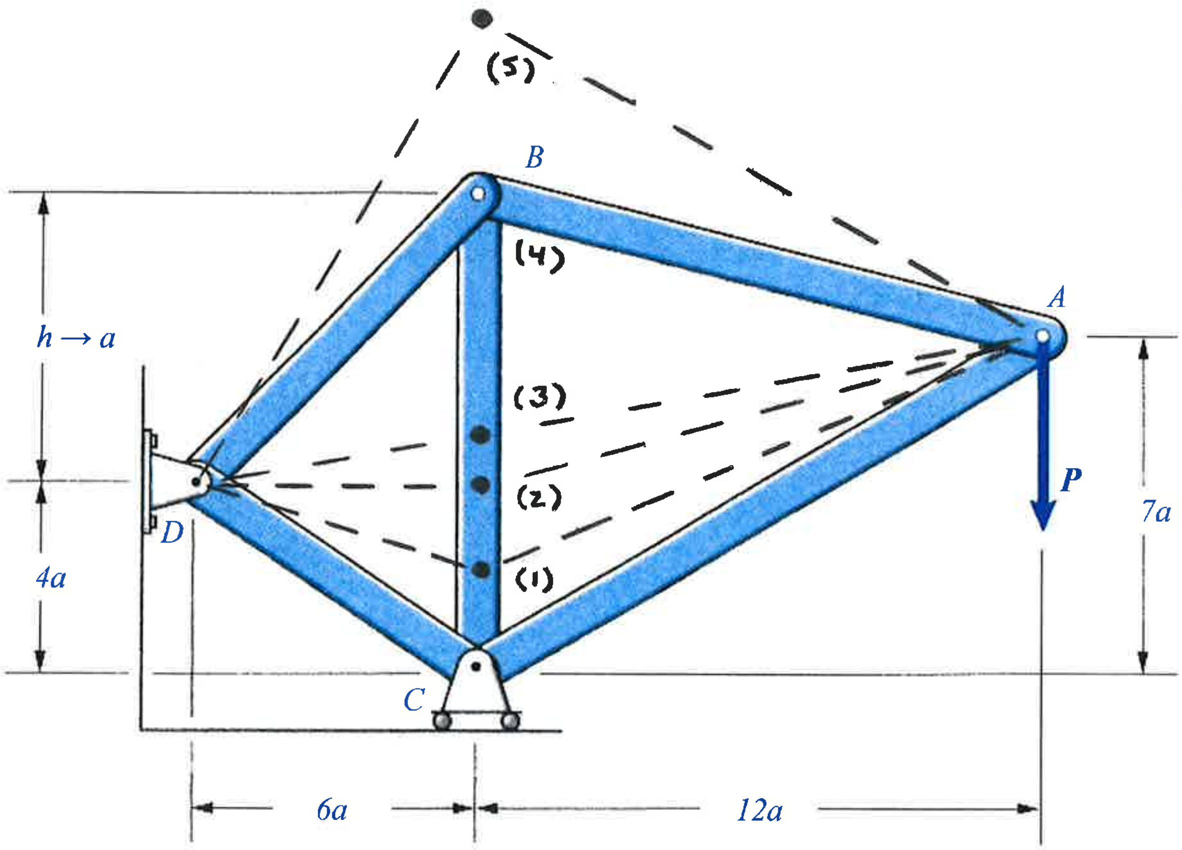


Förtydligande Uppgift 4

Tentamen i Mekanik, FMEA05 och FMEA15 del 1

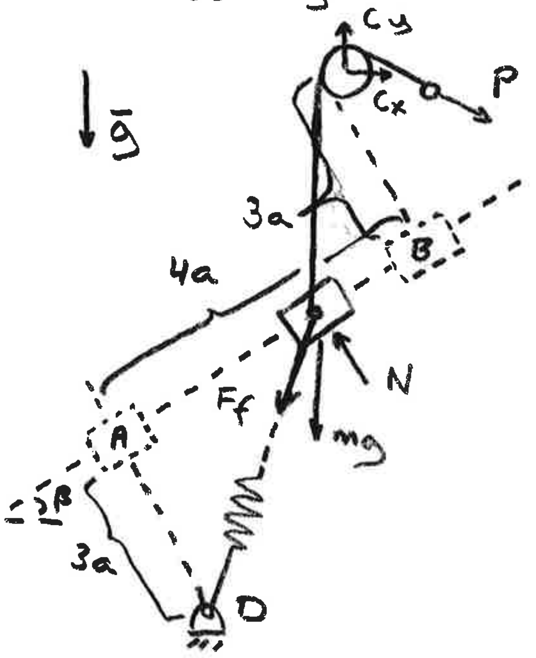
Måndagen den 18 mars, kl. 08.00 - 13.00, 2019

I uppgift 4 finns en illustration av ett fackverk där positionen för knutpunkt B anges av ett längdmått h. Detta längdmått är ursprungligen en designvariabel som i den aktuella tentamensuppgiften antar det specifika värdet $h = a$. Förutsättningarna för ändring av positionen för B är att förflyttning endast sker i vertikalled (h antar olika värden) så att stången BC förblir vertikal. Se nedan för några olika exempel (1) - (5) på hur fackverket kan se ut med några olika värden på h. Exempel (3) motsvarar $h = a$.



1

- Friläggning:



- Liten hylsa med massan m
- Glatt stång
- Lätt och lättrörlig trissa
- Lätt och oelastisk lina
- Konstant kraft P
- Startar från vila : A
- Naturlig längd fjäder : 3a
- Fjäderkonstant : k
- Sökt: det P som ger noll fart vid B.

- Arbete från icke-konservativa krafter: endast bidrag från P då N är vinkelrät mot förflyttningen och Cx samt Cy sitter i en stillastående punkt.

- Arbetet som P uträttar har storleken $P \cdot \Delta L$ där ΔL är förflyttningen av P:s angreppspunkt vilket motsvaras av $\Delta L = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} - 3a = 2a$ som är förändringen av linans längd till vänster om trissan.

- Allmänt uttryck för arbete och energi:

$$U'_{A-B} = P \cdot 2a = (T_B - T_A) + (V_{gB} - V_{gA}) + (V_{fB} - V_{fA})$$

Läge A	Läge B
$T_A = 0$	$T_B = 0$
$V_{gA} = 0$	$V_{gB} = mg\,4a\sin\beta$
$V_{fA} = 0$	$V_{fB} = \frac{k}{2}\left[\sqrt{(3a)^2+(4a)^2} - 3a\right]^2 = \frac{k}{2}(2a)^2$

1

- Insättning ger:

$$P \cdot 2a = [0-0] + [mg4a\sin\beta - 0] + \left[\frac{k}{2}(2a)^2 - 0\right] \Rightarrow$$

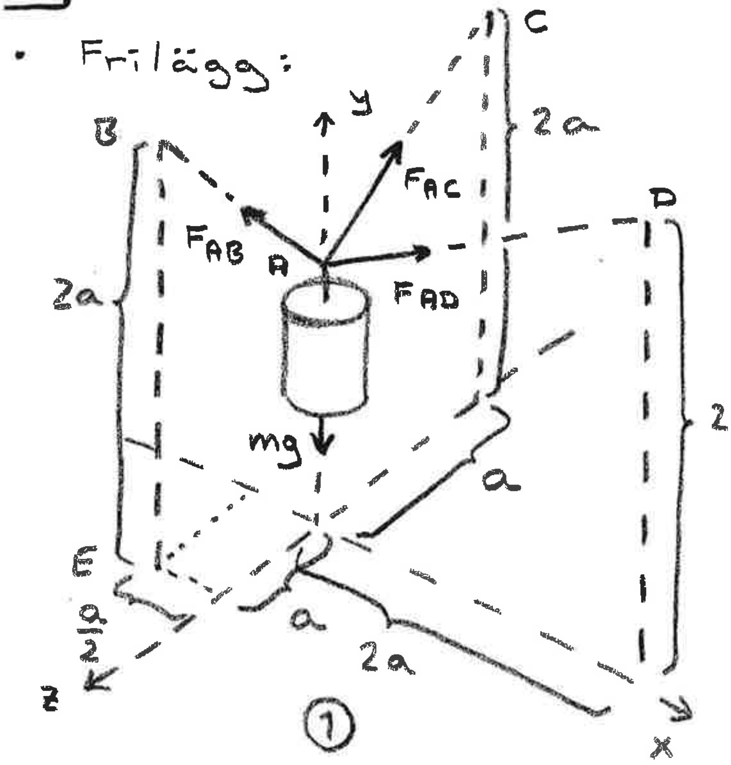
$$\Rightarrow \quad 2aP = 4amg\sin\beta + \frac{k}{2}\cdot 4a^2 \Rightarrow P = 2mg\sin\beta + \frac{k\cdot 2a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = 2mg\sin\beta + ka$$

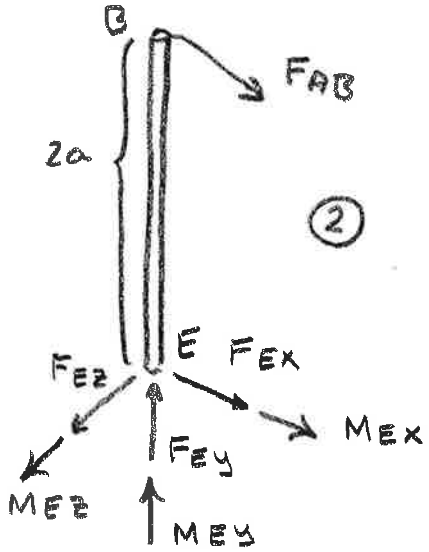
Svar: $P = 2mg\sin\beta + ka$

2

- Frilägg:



- Massa: m
- Statisk jämvikt
- Lätta oelastiska kablar
- Försumma egentyngden hos stolparna
- Stolparnas höjd: 2a
- Position för punkten A: $\left(0, \frac{3a}{2}, 0\right)$
- Beräkna reaktionskrafter och moment vid E.



$$\overline{mg} = (0, -mg, 0)$$

$$\overline{F}_E = (F_{EX}, F_{EY}, F_{EZ})$$

$$\overline{M}_E = (M_{EX}, M_{EY}, M_{EZ})$$

$$\overline{r}_{EB} = (0, 2a, 0)$$

- Krafter på vektorform:

$$\overline{F}_{AB} = F_{AB} \frac{[-a/2,\ a/2,\ a]}{\sqrt{(-a/2)^2 + (a/2)^2 + a^2}} = \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}}[-1, 1, 2]$$

$$\overline{F}_{AC} = F_{AC} \frac{[0,\ a/2,\ -a]}{\sqrt{0^2 + (a/2)^2 + (-a)^2}} = \frac{F_{AC}}{\sqrt{5}}[0, 1, -2]$$

$$\overline{F}_{AD} = F_{AD} \frac{[2a,\ a/2,\ 0]}{\sqrt{(2a)^2 + (a/2)^2 + 0^2}} = \frac{F_{AD}}{\sqrt{17}}[4, 1, 0]$$

2

- Kraftjämvikt:

1

$$\Sigma F_x = 0 \qquad -\frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + \frac{4F_{AD}}{\sqrt{17}} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + \frac{F_{AC}}{\sqrt{5}} + \frac{F_{AD}}{\sqrt{17}} - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0 \qquad \frac{2F_{AB}}{\sqrt{6}} - \frac{2F_{AC}}{\sqrt{5}} = 0 \qquad (3)$$

Observera att på stolpen verkar $-\bar{F}_{AB}$ (minustecken).

2

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + F_{Ex} = 0 \Rightarrow F_{Ex} = -\frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} \qquad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -\frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + F_{Ey} = 0 \Rightarrow F_{Ey} = \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} \qquad (5)$$

$$\Sigma F_z = 0 \qquad -\frac{2F_{AB}}{\sqrt{6}} + F_{Ez} = 0 \Rightarrow F_{Ez} = \frac{2F_{AB}}{\sqrt{6}} \qquad (6)$$

- Momentjämvikt:

2

$$\Sigma \bar{M}_E = \bar{r}_{EB} \times (-\bar{F}_{AB}) + \bar{M}_E = \bar{0}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 2a & 0 \\ \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} & -\frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} & -\frac{2F_{AB}}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} + (M_{Ex}, M_{Ey}, M_{Ez}) = (0,0,0)$$

$$x\text{-led:} \qquad 2a \cdot \left(-\frac{2F_{AB}}{\sqrt{6}}\right) + M_{Ex} = 0 \Rightarrow M_{Ex} = \frac{4aF_{AB}}{\sqrt{6}} \qquad (7)$$

$$y\text{-led:} \qquad M_{Ey} = 0 \qquad (8)$$

$$z\text{-led:} \qquad -2a \cdot \frac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + M_{Ez} = 0 \Rightarrow M_{Ez} = \frac{2aF_{AB}}{\sqrt{6}} \qquad (9)$$

- Insättning ger:

$$(1) \Rightarrow \quad F_{AD} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{F_{AB}}{4} \quad , \quad (3) \Rightarrow \quad F_{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} F_{AB}$$

insatt i (2) $\Rightarrow \quad \dfrac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + \dfrac{F_{AB}}{\sqrt{6}} + \dfrac{F_{AB}}{4\sqrt{6}} - mg = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{9}{4} \dfrac{F_{AB}}{\sqrt{6}} = mg \quad \Rightarrow \quad F_{AB} = \dfrac{4\sqrt{6}}{9} mg$, insatt nedan ger:

$$(4) \Rightarrow \quad F_{Ex} = -\frac{4\sqrt{6}}{9\sqrt{6}} mg = -\frac{4mg}{9}$$

$$(5) \Rightarrow \quad F_{Ey} = \frac{4\sqrt{6}}{9\sqrt{6}} mg = \frac{4mg}{9}$$

$$(6) \Rightarrow \quad F_{Ez} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} = \frac{8}{9} mg$$

$$(7) \Rightarrow \quad M_{Ex} = \frac{4a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} mg = \frac{16a}{9} mg$$

$$(8) \Rightarrow \quad M_{Ey} = 0$$

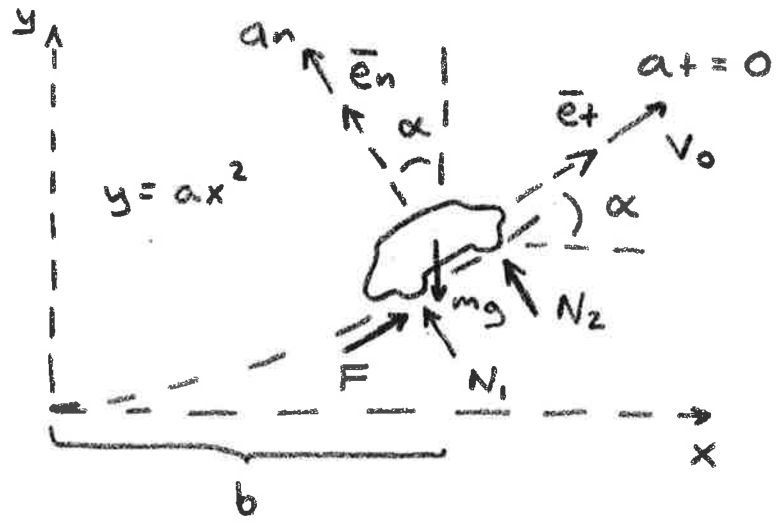
$$(9) \Rightarrow \quad M_{Ez} = \frac{2a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} mg = \frac{8a}{9} mg$$

Svar: $\bar{F}_E = \dfrac{4mg}{9} \left[-1, 1, 2 \right]$

$\bar{M}_E = \dfrac{8amg}{9} \left[2, 0, 1 \right]$

3

- Frilägg:



- Bakhjulsdriven bil
- Massa: m
- Konstant fart: $|\bar{v}| = V_0$
- Aktuellt läge: $x = b$
- Hur stor är friktionskraften samt normalkraften på bilen?

- Sträcka, hastighet och acceleration, Cartesiskt system:

$$x = b \tag{1}$$

$$\dot{x} = V_0 \cos\alpha \tag{2}$$

$$\ddot{x} = -a_n \sin\alpha \tag{3}$$

$$y = ax^2 = ab^2 \tag{4}$$

$$\dot{y} = 2ax \cdot \dot{x} = 2ab\dot{x} = V_0 \sin\alpha \tag{5}$$

$$\ddot{y} = 2a\left[\dot{x}\cdot\dot{x} + x\cdot\ddot{x}\right] = 2a\left[\dot{x}^2 + b\ddot{x}\right] = a_n\cos\alpha \tag{6}$$

- Kombination ger:

$(2) + (5) \Rightarrow \quad 2abV_0\cos\alpha = V_0\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \tan\alpha = 2ab \Rightarrow \alpha = \arctan(2ab)$ [1]

$(2)+(3)+(6) \Rightarrow \quad 2a\left[V_0^2\cos^2\alpha - ba_n\sin\alpha\right] = a_n\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2aV_0^2\cos^2\alpha - 2aba_n\sin\alpha = a_n\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2aV_0^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha + 2ab\sin\alpha} = a_n$ [2]

3

- Kraftekvationer:

$$\sum F_n = ma_n \qquad N_1 + N_2 - mg\cos\alpha = ma_n \qquad (7)$$

$$\sum F_t = ma_t \qquad F - mg\sin\alpha = ma_t \qquad (8)$$

$$(7) \Rightarrow \quad N_1 + N_2 = mg\cos\alpha + ma_n$$

$$(8) \Rightarrow \quad F = mg\sin\alpha$$

Svar: Friktionskraften är $F = mg\sin\alpha$

och totala normalkraften är

$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha + ma_n$

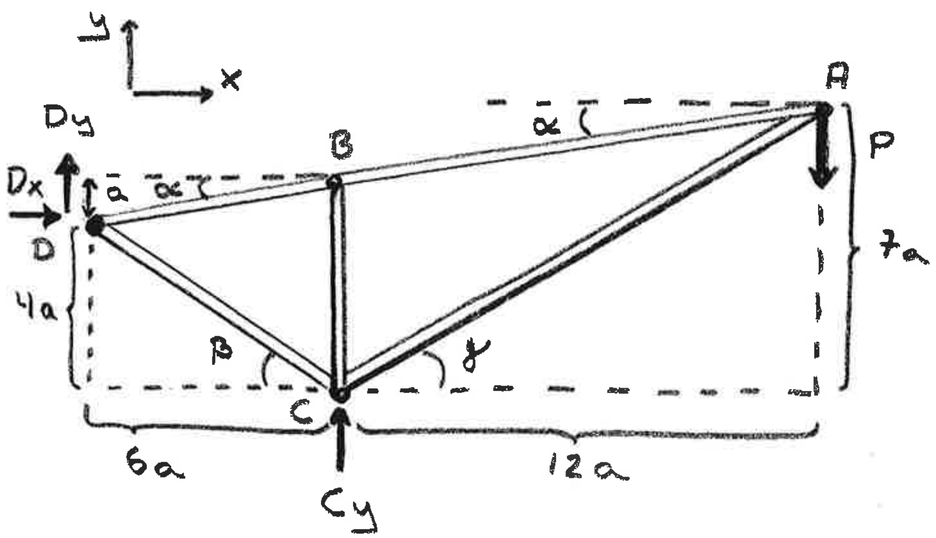
där $\alpha = \arctan(2ab)$

och $a_n = \dfrac{2av_0^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha + 2ab\sin\alpha}$

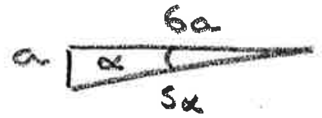
4

- Statisk jämvikt
- Fackverk
- Sökt: de ekvatione som krävs för att räkna ut alla stångkrafter. Identifiera även vilken stång som utsätts för den största tryckkraften.

- Frilägg hela:

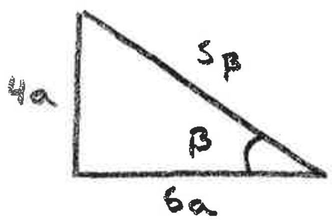


$$\frac{a}{6a} = \left(\frac{7a-5a}{12a}\right) = \frac{1}{6} = \tan\alpha$$



$$S_\alpha = \sqrt{a^2 + (6a)^2} = \sqrt{37}\,a$$

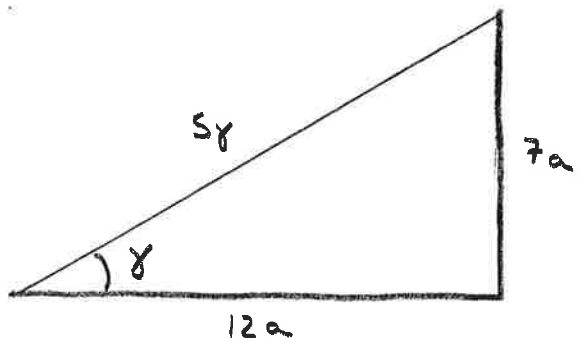
$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{37}a} = \frac{1}{\sqrt{37}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{6a}{\sqrt{37}a} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$



$$S_\beta = \sqrt{(4a)^2 + (6a)^2} = \sqrt{52}\,a$$

$$\sin\beta = \frac{4a}{\sqrt{52}a} = \frac{4}{\sqrt{52}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{6a}{\sqrt{52}a} = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$S_\gamma = \sqrt{(7a)^2 + (12a)^2} = \sqrt{193}\,a$$



$$\sin\gamma = \frac{7a}{\sqrt{193}a} = \frac{7}{\sqrt{193}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{12a}{\sqrt{193}a} = \frac{12}{\sqrt{193}}$$

4

- Kraft- och momentjämvikt:

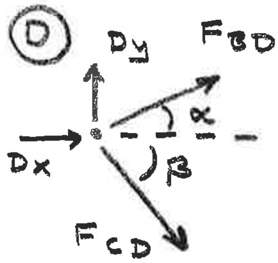
$\sum F_x = 0 \quad D_x = 0 \qquad (1)$

$\sum F_y = 0 \quad D_y + C_y - P = 0 \qquad (2)$

$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_C} = 0 \quad -P \cdot 12a - D_y \cdot 6a - D_x \cdot 4a = 0 \qquad (3)$

$\Rightarrow \quad D_x = 0, \quad D_y = -2P, \quad C_y = 3P$

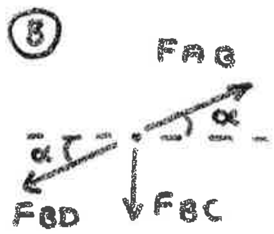
- Knutpunktsmetoden:



$\sum F_x = 0 \quad D_x + F_{BD}\cos\alpha + F_{CD}\cos\beta = 0 \qquad (4)$

$\sum F_y = 0 \quad D_y + F_{BD}\sin\alpha - F_{CD}\sin\beta = 0 \qquad (5)$

$\Rightarrow \quad F_{CD} = \dfrac{-2P}{\left[\sin\beta + \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}\right]}, \quad F_{BD} = \dfrac{2P}{\left[\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\right]}$



$\sum F_x = 0 \quad F_{AB}\cos\alpha - F_{BD}\cos\alpha = 0 \qquad (6)$

$\sum F_y = 0 \quad F_{AB}\sin\alpha - F_{BD}\sin\alpha - F_{BC} = 0 \qquad (7)$

$\Rightarrow \quad F_{AB} = \dfrac{2P}{\left[\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\right]}, \quad F_{BC} = 0$

$\sum F_x = 0 \quad -F_{AB}\cos\alpha - F_{AC}\cos\gamma = 0 \qquad (8)$

$\sum F_y = 0 \quad -F_{AB}\sin\alpha - F_{AC}\sin\gamma - P = 0 \qquad (9)$

$\Rightarrow \quad F_{AC} = \dfrac{-2P}{\left[\dfrac{\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta}\right]}$

- Studie av tryck (negativt) och drag (positivt):

Tryckkrafter i F_{CD} och F_{AC}, dragkrafter/noll i övriga.

4

- Studera storleken hos F_{CD} och F_{AC}:

$$F_{CD} = \frac{-2P}{\left[\frac{4}{\sqrt{52}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{37}} \cdot \frac{6}{\sqrt{52}}}{\frac{6}{\sqrt{37}}}\right]} = \frac{-2P}{\left[\frac{4}{\sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{52}}\right]} = \frac{-2P}{\frac{5}{\sqrt{52}}} = -\frac{2\sqrt{52}\,P}{5}$$

$$F_{AC} = \frac{-2P}{\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{37}} \cdot \frac{12}{\sqrt{193}}}{\frac{6}{\sqrt{37}}} + \frac{\frac{4}{\sqrt{52}} \cdot \frac{12}{\sqrt{193}}}{\frac{6}{\sqrt{52}}}\right]} = \frac{-2P}{\left[\frac{2}{\sqrt{193}} + \frac{8}{\sqrt{193}}\right]} = \frac{-2P}{\frac{10}{\sqrt{193}}} = -\frac{\sqrt{193}\,P}{5}$$

- Vilken kraft av F_{CD} och F_{AC} är störst?

$$F_{CD} = -\frac{2\sqrt{52}\,P}{5} \quad , \quad F_{AC} = -\frac{\sqrt{193}\,P}{5}$$

Är $2 \cdot \sqrt{52}$ större än, eller mindre än $\sqrt{193}$?

$$2 \cdot \sqrt{52} > 2 \cdot \sqrt{49} = 2 \cdot \sqrt{7 \cdot 7} = 2 \cdot 7 = 14$$

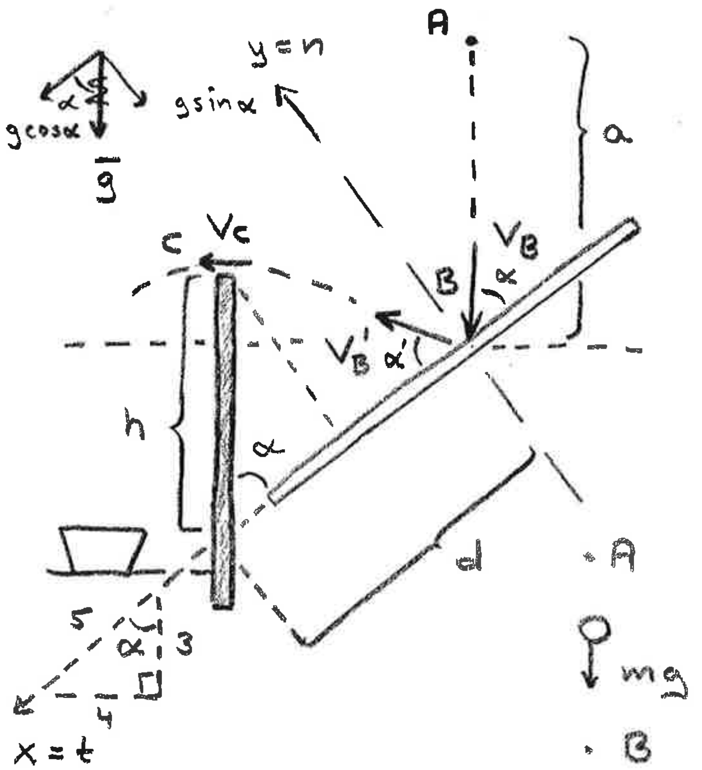
$$\sqrt{193} < \sqrt{196} = \sqrt{14 \cdot 14} = 14$$

Detta ger att $F_{CD} > F_{AC}$

Svar: CD utsätts för den största tryckkraften, ekvationerna som beskriver lösningen på problemet återfinns ovan.

5

- Figur:



- Massa: m
- Stöttal: e = 4/5
- Startar från vila i A
- Bestäm storleken på d och h för att ett bär som släpps från höjden a precis passerar vid C.

Fritt fall mellan A och B, $U'_{A-B} = 0$

- Fritt fall mellan A och B, allmänt uttryck för arbete och energi:

$$U'_{A-B} = (T_B - T_A) + (V_{gB} - V_{gA}) + (V_{fB} - V_{fA}) \qquad (1)$$

Läge A	Läge B
$T_A = 0$	$T_B = \frac{m v_B^2}{2}$
$V_{gA} = 0$	$V_{gB} = -mga$
$V_{fA} = 0$	$V_{fB} = 0$

- Insättning ger: $0 = \left(\frac{m v_B^2}{2} - 0\right) + (-mga - 0) + (0 - 0)$

$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2ga}$

- Geometri: $\sin\alpha = 4/5 \qquad (2)$

$\cos\alpha = 3/5 \qquad (3)$

5

- Stöt vid B :

$$m_1 \cdot V_{1n} + m_2 \cdot V_{2n} = m_1 \cdot V_{1n}' + m_2 \cdot V_{2n}' \qquad (4)$$

$$m_1 \cdot V_{1t} = m_1 \cdot V_{1t}' \qquad (5)$$

$$m_2 \cdot V_{2t} = m_2 \cdot V_{2t}' \qquad (6)$$

$$e = - \frac{[V_{2n}' - V_{1n}']}{[V_{2n} - V_{1n}]} \qquad (7)$$

- Här gäller att :

$m_1 = m$, $V_{1n} = - V_B \sin\alpha$, $V_{1t} = V_B \cos\alpha$

$m_2 = \infty$, $V_{2n} = V_{2t} = V_{2n}' = V_{2t}' = 0$, $e = 4/5$

- Insättning ger :

$$m \cdot (- V_B \sin\alpha) + \infty \cdot 0 = m \cdot V_{1n}' + \infty \cdot 0 \quad \text{(Obrukbar)}$$

$$m \cdot V_B \cos\alpha = m \cdot V_{1t}'$$

$$\infty \cdot 0 = \infty \cdot 0 \quad \text{(Obrukbar)}$$

$$\frac{4}{5} = - \frac{[0 - V_{1n}']}{[0 - (- V_B \sin\alpha)]}$$

$$\Rightarrow \quad V_{1t}' = V_B \cos\alpha \, , \quad V_{1n}' = \frac{4}{5} \cdot V_B \sin\alpha$$

- Utnyttja (1) - (3) ger :

$$V_{1t}' = \sqrt{2ga} \cdot \frac{3}{5} \, , \quad V_{1n}' = \sqrt{2ga} \cdot \frac{16}{25}$$

5

- Kastparabel:

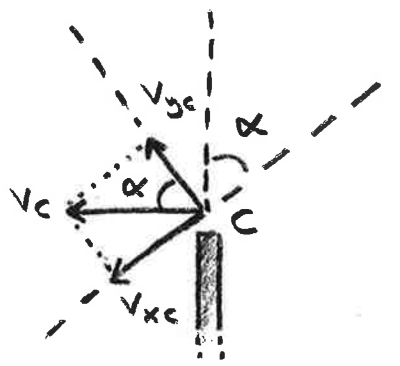
$a_x = g\cos\alpha \qquad\qquad a_y = -g\sin\alpha$

$V_x = g\cos\alpha\, t + V_{it}' \qquad\qquad V_y = -g\sin\alpha\, t + V_{in}'$

$s_x = \dfrac{g\cos\alpha\, t^2}{2} + V_{it}'t + 0 \qquad\qquad s_y = -\dfrac{g\sin\alpha\, t^2}{2} + V_{in}'t + 0$

- Här gäller att:

$s_{xc} = d - h\cos\alpha\,, \quad s_y = h\sin\alpha\,, \quad \dfrac{V_{xc}}{V_{yc}} = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



(Nedanstående uträkningar är inget krav för full poäng på uppgiften.)

- Insättning ger med $\sin\alpha = 4/5$ och $\cos\alpha = 3/5$:

$$s_{xc} = \frac{g\cdot[3/5]}{2}t_c^2 + \sqrt{2ga}\,[3/5]\,t_c = d - h\cdot[3/5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g t_c^2}{2} + \sqrt{2ga}\, t_c = \frac{5d}{3} - h \qquad [1]$$

$$s_{yc} = -\frac{g\cdot[4/5]}{2}t_c^2 + \sqrt{2ga}\cdot\frac{16}{25}t_c = h\cdot[4/5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{g t_c^2}{2} + \sqrt{2ga}\cdot[4/5]\,t_c = h \qquad [2]$$

$$\frac{V_{xc}}{V_{yc}} = \frac{g\cdot[3/5]\,t_c + \sqrt{2ga}\cdot[3/5]}{-g\cdot[4/5]\,t_c + \sqrt{2ga}\cdot[16/25]} = \tan\alpha = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{gt + \sqrt{2ga}}{-gt + \sqrt{2ga}\cdot[4/5]} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{9} \qquad [3]$$

$\boxed{5}$

- Kombination av [1], [2] och [3] ger:

$$[3] \Rightarrow gt_c + \sqrt{2ga} = -\frac{16}{9} gt_c + \sqrt{2ga} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad gt_c \left[\frac{9+16}{9}\right] = \sqrt{2ga} \left[\frac{4 \cdot 16 - 5 \cdot 9}{5 \cdot 9}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2a}{g}} \left[\frac{64-45}{45}\right] \cdot \left[\frac{9}{25}\right] = \sqrt{\frac{2a}{g}} \, \frac{19}{125}$$

Insättning av t_c i [2] ger:

$$-\frac{g}{2}\left[\sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot \frac{19}{125}\right]^2 + \sqrt{2ga} \cdot [4/5] \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}} \, \frac{19}{125} = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a\left[\frac{19}{125}\right]^2 + 2a \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{125} = \left[\frac{8}{5} - \frac{19}{125}\right]\frac{19a}{125} = \frac{399a}{15625} = h$$

Insättning av t_c och h i [1] ger:

$$\frac{g}{2} \cdot \left[\sqrt{\frac{2a}{g}} \, \frac{19}{125}\right]^2 + \sqrt{2ga} \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}} \, \frac{19}{125} = \frac{5d}{3} - \left[\frac{8}{5} - \frac{19}{125}\right] \frac{19a}{125} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left[\frac{19}{125}\right]^2 + 2a \cdot \frac{19}{125} = \frac{5d}{3} - \left[\frac{8}{5} - \frac{19}{125}\right] \frac{19a}{125} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19a}{125}\left[\frac{19}{125} + 2 + \frac{8}{5} - \frac{19}{125}\right] \cdot \frac{3}{5} = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19a}{125}\left[\frac{18}{5}\right] \cdot \frac{3}{5} = \frac{1026a}{3125} = d$$

Svar: Nödvändiga ekvationer återges ovan.

$$d = \frac{1026a}{3125}, \quad h = \frac{399a}{15625}$$