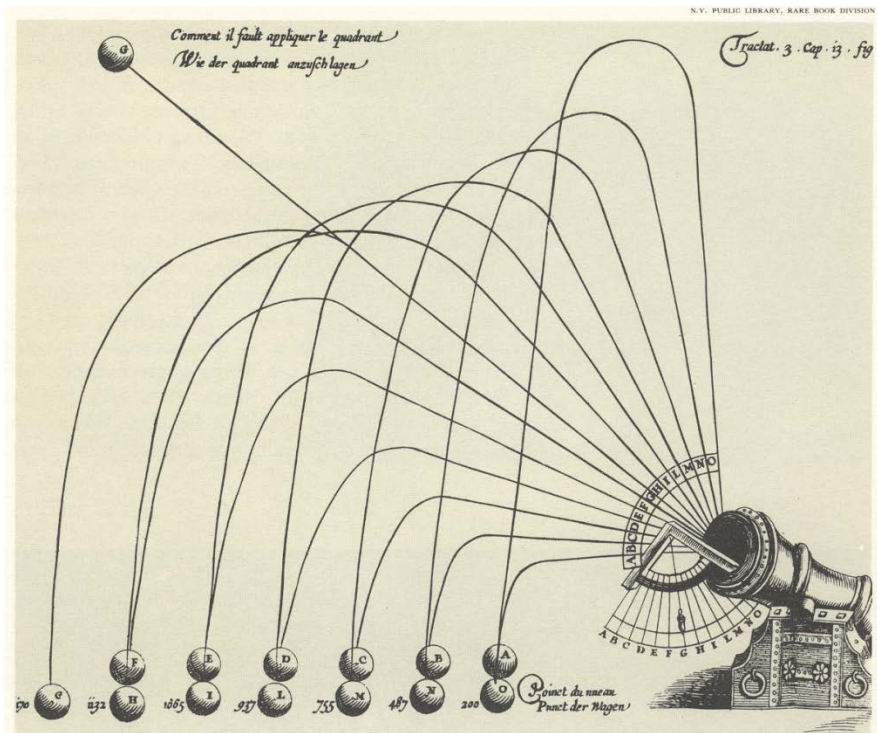

K. Nilsson och P. Lidström

Ballistiska banor



Detta diagram i en kanonjär-handbok från 1621 visar den verkliga, paraboliska banan för en projektil. Kulan markerad med G har avfyrats i 45° vinkel, idealisk för långt avstånd.

AVDELNINGEN FÖR MEKANIK

INSTITUTIONEN FÖR MASKINTEKNOLOGI

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA

2018

Ballistiska banor

Specifikation

Kristina Nilsson och Per Lidström

Innehåll

1. Introduktion	2
2. Problemformulering	2
3. Teoretisk modell	3
4. Grundläggande data	5
5. Teoretiska undersökningar	5
6. Kort ADAMS-manual för ballistiska banor	8
7. Anvisningar för skriftlig redovisning	9
8. Bedömning och återkoppling avseende den skriftliga redovisningen.	10

1. Introduktion

I detta projekt kommer vi att studera ballistiska banor genom att använda kunskaper i mekanik i kombination med simuleringsprogrammet ADAMS. Vi kommer att undersöka rörelsen för en ballistisk projektil som rör sig i närheten av Jordens yta. För en observatör som befinner sig på Jordens yta kommer projektilen att utsättas för ett antal krafter, exempelvis:

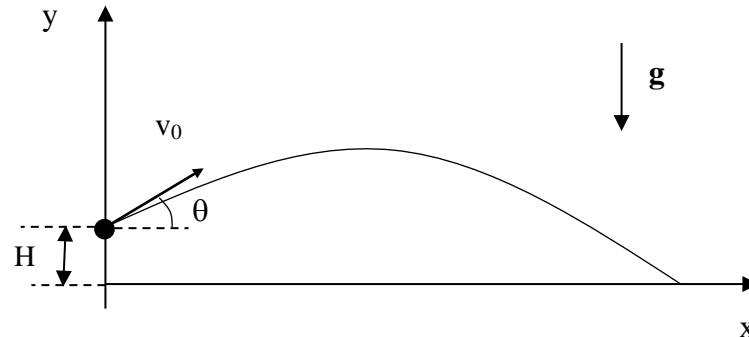
- den lokala gravitationskraften från Jorden
- aerodynamiska krafter från luften
- den påverkan som uppstår på grund av Coriolisaccelerationen relativt Jorden (den så kallade “Corioliskraften”)

Dessa krafter, såväl som exempelvis massfördelningen i projektilen och dess form, samt rörelsens initiala förutsättningar - till exempel elevationsvinkeln, kommer att påverka den ballistiska banan.

2. Problemformulering

En projektil skickas iväg från en utgångsposition uppe på en kulle med höjden H som omges av ett flackt landskap vid havsnivå, se Figur 1. Vi vill ta reda på hur den maximala räckvidden för projektilen, det vill säga det maximala horisontella avståndet från utgångspositionen till dess projektilen träffar Jordens yta, samt projektilbanans form och utseende beror av olika

parametrar som exempelvis elevationsvinkeln, luftmotståndet, skjutriktningen och startpositionen på Jordens yta (latituden).



Figur 1: Ballistisk bana

3. Teoretisk modell

I vår teoretiska modell antar vi att projektilen kan approximeras med en partikel med massan m . Vi antar att gravitationskraften \mathbf{F}_g är konstant i det område som hyser den ballistiska banan

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \tag{1}$$

Gravitationen kan uttryckas med hjälp av en lokal ortonormal referensram $(\mathbf{\hat{o}} \ \mathbf{\hat{n}} \ \mathbf{\hat{u}})_O$ som är fixerad i förhållande till Jordens yta

$$\mathbf{g} = (-g)\mathbf{\hat{u}} \tag{2}$$

där basen $(\mathbf{\hat{o}} \ \mathbf{\hat{n}} \ \mathbf{\hat{u}})_O$ byggs upp av följande vektorer; $\mathbf{\hat{o}}$ ("östlig riktning"), $\mathbf{\hat{n}}$ ("nordlig riktning"), $\mathbf{\hat{u}}$ ("vertikal riktning uppåt"), O ("utgångspositionen = origo"), se Figur 3.

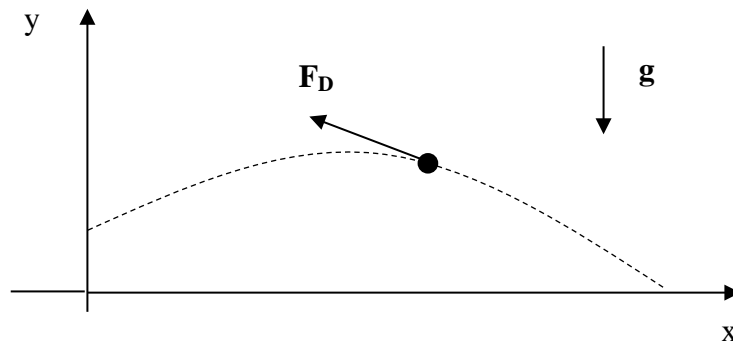
Den aerodynamiska kraften kan delas in i två komponenter, den "aerodynamiska lyftkraften" \mathbf{F}_L och det aerodynamiska luftmotståndet \mathbf{F}_D (benämnes "drag force" på engelska). I denna modell antar vi att lyftkraften är försumbar

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{0} \tag{3}$$

och att luftmotståndet kan uttryckas enligt (i stilla luft)

$$\mathbf{F}_D = -D\mathbf{v} \ \mathbf{v} \tag{4}$$

där \mathbf{v} är hastigheten för partikeln i förhållande till Jordens yta (och den omgivande luften) och D är luftmotståndskoefficienten (vilken beror på luftdensiteten samt projektilens diameter och form), se Figur 2. Hastighetens storlek (eller absolutbelopp) betecknas med v .



Figur 2: Luftmotstånd

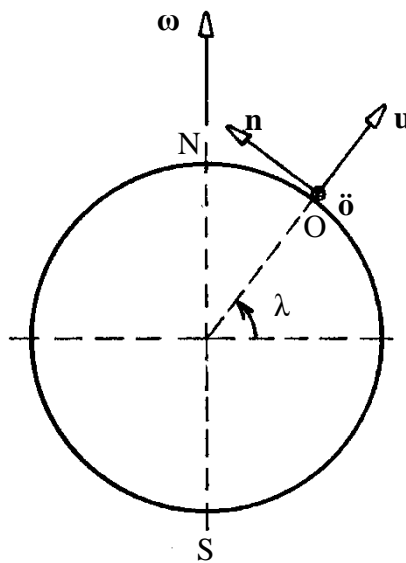
Den “Corioliskraft”, som uppstår på grund av Jordens rotation kan skrivas som

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (5)$$

där $\boldsymbol{\omega}$ är Jordens vinkelhastighet (relativt en referensram som är fixerad i jämförelse med fixstjärnor på stort avstånd från Jorden). I den lokala ortonormala referensramen som är fixerad vid Jordens yta ($\mathbf{\ddot{o}} \mathbf{n} \mathbf{u}$)O, kan Jordens vinkelhastighet uttryckas enligt

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos\lambda \mathbf{n} + \sin\lambda \mathbf{u}) \quad (6)$$

där λ är latituden för det ballistiska området. Se Figur 3.



Figur 3: Latituden och den ortonormala referensramen ($\mathbf{\ddot{o}} \mathbf{n} \mathbf{u}$)O.

4. Grundläggande data

Parameter	Symbol	Enhet	Numeriskt värde
Gravitationsacceleration	g	m/s^2	9.81
Jordens vinkelhastighet	ω	rad/s	$7.3 \cdot 10^{-5}$
Latitud	λ	$^\circ$ (grader)	56
Kullens höjd vid startpositionen	H	m	300
Initial skjutriktning	α	$^\circ$ (grader)	-
Elevationsvinkel	θ	$^\circ$ (grader)	-
Projektilmassa	m	kg	50
Projektilens initiala fart	v_0	m/s	550
Luftmotståndskoefficient	D	Ns^2/m^2	0.001

Tabell 1: Grundläggande data att använda som default

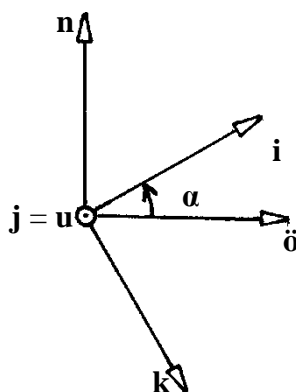
5. Teoretiska undersökningar

Låt enhetsvektorn

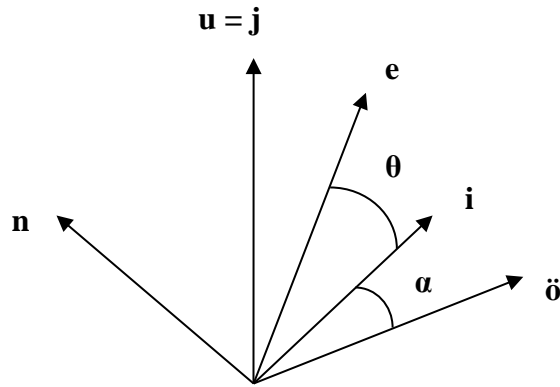
$$\mathbf{i} = \cos\alpha \mathbf{\ddot{o}} + \sin\alpha \mathbf{n} \quad (7)$$

definiera den initiala skjutriktningen \mathbf{i} i det horisontella planet ($\mathbf{\ddot{o}}\mathbf{-n}$ -planet, vinkeln α mäts utifrån den östliga riktningen, se Figur 4). Den ortonormala ramen ($\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$) \mathcal{O} förhåller sig till ramen ($\mathbf{\ddot{o}} \mathbf{n} \mathbf{u}$) \mathcal{O} enligt ekvation (7) och

$$\mathbf{j} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{k} = \sin\alpha \mathbf{\ddot{o}} - \cos\alpha \mathbf{n} \quad (8)$$



Figur 4: Den ortonormala basen ($\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$) \mathcal{O}

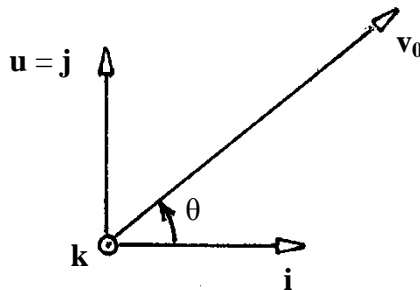


Figur 5: Initial projektilriktning **e**

Den initiala projektilriktningen $\mathbf{e} = (\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j})$, där θ är elevationsvinkeln, anger vilken riktning projektilen har initialt, se Figur 5. Projektilen skickas iväg i ett vertikalt plan (**i-j**-planet, se Figur 6) med initialhastigheten

$$\mathbf{v}_0 = v_0(\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}) = v_0 \mathbf{e} \quad (9)$$

där θ är elevationsvinkeln och \mathbf{e} är den initiala projektilriktningen.



Figur 6: Initialhastighet och elevationsvinkel

Projektilens räckvidd utgörs av det horisontella avståndet från utgångspositionen till det läge där projektilen träffar Jordens yta. Genom att ändra elevationsvinkeln kan vi uppnå olika räckvidd för projektilen. Projektilens maximala räckvidd är det maximala värdet på det horisontella avståndet mellan utgångspositionen och det läge där projektilen träffar Jordens yta, som kan uppnås med en elevationsvinkel θ , där $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

$$\text{maximal räckvidd} = \text{maximalt horisontellt avstånd, } 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad (10)$$

5.1 Försumma påverkan av luftmotståndet och Corioliseffekten

Vi antar att

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}_C = \mathbf{0} \quad (11)$$

samt att gravitationskraften \mathbf{F}_g ges av ekvation (1).

Uppgifter:

- Bestäm analytiskt den ballistiska banan för projektilen och beräkna den maximala räckvidden i fallet $H = 0$. Redovisa de analytiska beräkningarna.
- Hur stor blir den korresponderande elevationsvinkeln θ (den optimala elevationsvinkeln)?
- Hur påverkas den maximala räckvidden och den optimala elevationsvinkeln av H ? Svara på frågan genom att redovisa det fullständiga analytiska uttrycket för räckvidden där $H \neq 0$.
- Konstruera en modell av problemet med hjälp av ADAMS. Använd den grundläggande data som ges av Tabell 1, men låt i ett första skede $H = 0$.
- Studera den ballistiska bankurvans form och jämför de värden som erhålls vid simuleringen med de analytiska värdena.
- Låt nu H anta värdet enligt Tabell 1.
- Bestäm den maximala räckvidden och korresponderande elevationsvinkeln med hjälp av ADAMS.
- Studera den ballistiska bankurvans form och jämför de värden som erhålls vid simuleringen med de analytiska värdena.

5.2 Försumma påverkan av Corioliseffekten

Antag att

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{0} \quad (12)$$

samt att gravitationskraften \mathbf{F}_g och luftmotståndet \mathbf{F}_D ges av ekvationerna (1) respektive (4).

Uppgifter:

- Uttryck luftmotståndet (4) i den ortonormala basen $(\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k})$.
- Konstruera en modell av problemet med hjälp av ADAMS.
- Bestäm den maximala räckvidden samt den korresponderande elevationsvinkeln för projektilen med hjälp av ADAMS.
- Studera den ballistiska bankurvans form.
- Jämför resultaten med dem som erhållits under punkten 5.1.
- Om luftmotståndskoefficientens defaultvärde ökas med 50%, hur påverkar detta den maximala räckvidden?

5.3 Den utökade teoretiska modellen

Vi antar att krafterna F_g , F_D och F_C ges av ekvationerna (1), (4) och (5).

Uppgifter:

- Återställ luftmotståndskoefficientens defaultvärde!
- Uttryck jordens vinkelhastighetsvektor i den ortonormala basen (\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}) med hjälp av vinklarna λ och α .
- Använd ADAMS för att konstruera en modell av problemet.
- Beräkna den ballistiska banan med hjälp av ADAMS. Använd det värde på elevationsvinkeln som erhållits för den optimala elevationsvinkeln i uppgift 5.2. Utför simuleringen för följande initiala projektilriktningar

$$\alpha = 0^\circ \text{ ("österut")} \text{ och } \alpha = 90^\circ \text{ ("norrut")}$$

- Hur påverkar Coriolis-effekten den ballistiska banan?
- Ändra latituden till $\lambda = 0$ (en position på ekvatorn) och undersök följande initiala riktningar för projektilen

$$\alpha = 0^\circ \text{ ("österut")} \text{ och } \alpha = 90^\circ \text{ ("norrut")}$$

- På vilket sätt påverkas Corioliseffekten av latituden för startpositionen?

6. Kort ADAMS-manual för Ballistiska banor

6.1 Försumma påverkan av luftmotståndet och Corioliseffekten (5.1)

- Jämför med Exercise 2 i datorlaborationen.
- Den ballistiska banan kommer att täcka ungefär 30km. Välj följande "Working Grid"

	X	Y
Size	(30km)	(10km)
Spacing	(500m)	(500m)

- Se till att hela arbetsytan syns på skärmen. Detta kräver att man "zoomar in" flera gånger.
- För projektilen väljes "Rigid body: Sphere". Välj en stor radie (Radius = 200m) så att sfären blir synlig på skärmen.
- Skapa "Design Variables" λ , α , θ och D. Använd defaultvärdet för λ samt $\alpha = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$ och D = 0.
- Definiera initialvärden för projektilrörelsen.
- Skapa nödvändiga "Measures" för att kunna studera projektilrörelsen.
- Skapa en sensor för att stoppa simuleringen då projektilen träffar marken.
- Prova modellen genom att köra simuleringar och stämma av med de analytiska beräkningarna.

- Skapa och kör en “Design Study” för att undersöka hur projektilens räckvidd beror på elevationsvinkeln θ i intervallet $45^\circ \pm 15^\circ$.
- Bestäm den maximala räckvidden och korresponderande optimal elevationsvinkel.

6.2 Försumma påverkan av Corioliseffekten (5.2)

- Skapa nödvändiga “Measures” för att kunna hantera ett introducerat luftmotstånd.
- Introducera luftmotstånd. Använd “Applied Force: Force Vector (3-Component Force); 1 Location, Normal to Grid, Custom”. Sätt in uttryck för kraftens x-, y- och z-komponenter.
- Skapa och kör en “Design Study” för att undersöka hur projektilens räckvidd beror på elevationsvinkeln θ i intervallet $45^\circ \pm 15^\circ$.
- Bestäm den maximala räckvidden och korresponderande optimal elevationsvinkel.

6.3 Den utökade teoretiska modellen (5.3)

- Skapa “Corioliskraften”. Använd “Applied Force: Force Vector (3-Component Force); 1 Location, Normal to Grid, Custom”. Sätt in uttryck för kraftens x-, y- och z-komponenter. Uttrycket för “Corioliskraften” är något komplicerat. Var noggrann och kontrollera de uttryck som används innan simulering.

7. Anvisningar för skriftlig redovisning

Den skriftliga redovisningen sker i form av en **vetenskaplig artikel** som ska vara utformad på ett sådant sätt att **en kurskamrat som inte har utfört fördjupningsuppgiften har möjlighet att sätta sig in i frågeställningen, utförandet och resultatet**. Läsaren ska, med hjälp av artikeltexten i kombination med angivna referenser, kunna genomföra samma undersökning som beskrivs i artikeln och verifiera resultaten. Artikeln **ska** vara utformad enligt följande specifikation:

1. Numrerade sidor
2. Numrerade ekvationer
3. Numrerade figurer
4. Numrerade tabeller
5. Figurer måste ha förtydligande figurtext
6. Tabeller måste ha förtydligande tabelltext
7. Figurer får endast infogas i artikeln om de refereras till i den löpande texten
8. Tabeller får endast infogas i artikeln om de refereras till i den löpande texten
9. Tydligt markerade referenser med tillhörande referenslista ska ingå, minimum tre referenser varav minst två externa (ej med anknytning till Mekanik, LTH).
10. Endast referenser som hänvisas till i den löpande texten infogas i referenslistan

Artikelgranskarna kan komma att referera till numreringen ovan vid eventuell uppmaning till korrigerande i samband med återkoppling på artikeltexten.

Dessutom **ska** följande moment ingå:

- **Sökord/nyckelord** ska infogas, 4-6 stycken. Dessa ska underlätta för läsaren att identifiera vad artikeln handlar om
- **Inledande sammandrag (abstract)** Kort beskrivning av innehållet, som ska ge en snabb överblick och inte minst fånga läsarens intresse.
- **Inledning och bakgrund** En beskrivning av fördjupningsuppgiftens syfte och inriktning.
- **Problemformulering** Vilken är den utvalda frågeställningen?
- **Metod och utförande** Redogör för hur undersökningen har genomförts. Beskriv kortfattat vilka hjälpmedel som utnyttjats vid analysen. Vilka antaganden och vilka approximationer har gjorts? Har analytiska beräkningar genomförts? Hur har modellen i ADAMS byggts upp? Vilken teori har använts?
- **Resultat** Ange vilka resultat som erhöles i form av beräknade värden och kvalitativa resultat. För analytiska resultat redovisas både **ekvationer** och **numeriska värden**. Simuleringsresultat ska motiveras med **ADAMS-utskriften**. Bilder av ballistiska banor i lämplig vy ska bifogas. Organisera eventuellt delar av resultatet i tabellform. Figurer ritas med hjälp av dator. Varje figur ska då numreras och förses med beskrivande text. Figurer refereras till med hjälp av figurnumret och samtliga införda figurer måste refereras till i den löpande texten. Vilka resultat är extra intressanta och bör lyftas fram?
- **Diskussion** Stämmer resultatet med den teori som har antagits? Är resultaten rimliga - hur kan resultatens rimlighet påvisas/motiveras? Hur kan eventuella avvikelser förklaras? Finns det skäl att tro att problemställningen inte är så idealiserad som teorin förutsätter? Det är viktigt att här återkoppla till den inledande frågeställningen.
- **Slutsatser och sammanfattning** En kort summering av syfte och innehåll där de centrala resultaten lyfts fram. Här är det återigen extra viktigt att fånga läsarens intresse.

Dessutom **ska** samtliga punkter under Uppgifter (5.1-5.3) redovisas. Tänk på att **samtliga** simuleringsresultat ska motiveras med ADAMS-utskriften.

Arbetsgruppen själv avgör hur artikeln ser ut i detalj vad gäller följande:

- Layout
- Val av sökord/nyckelord
- Val av rubriker, rubriksättning
- Innehållets struktur
- Antal tabeller
- Antal figurer
- Val av referenser (källtexter)
- Val av referenssystem (hur referenser hanteras systematiskt)

8. Bedömning och återkoppling avseende den skriftliga redovisningen

För att få godkänt på den skriftliga redovisningen måste samtliga krav på innehåll och utformning enligt avsnitt 7 ovan vara uppfyllda. Samtliga resultat och införda ekvationer ska vara korrekta. Återkopplingen kommer att indikera de ekvationer som behöver korrigeras, men inte på vilket sätt de ska korrigeras. Kompletterande figurer kan komma att efterfrågas,

liksom kompletterande kommentarer och förtydliganden. Textavsnitt som behöver korrigeras innehållsmässigt kommer att markeras, men återkopplingen sker främst genom att läsaren ställer frågor till författarna, inte genom att läsaren specificerar en exakt formulering som ersätter den text som behöver korrigeras. Förutom krav på kompletteringar och korrigeringar kommer läsaren att bifoga sina egna personliga kommentarer till artikelns läsbarhet, struktur, layout etcetera. Dessa personliga kommentarer utgör en hjälp och återkoppling till artikel-författarna inför kommande skrivuppgifter. För att särskilja det som måste korrigeras eller kompletteras för godkänt betyg från det som är personliga kommentarer och återkoppling inför framtida skrivuppgifter, kommer de förstnämnda att markeras på ett tydligt sätt.

Tänk på: Spara ADAMS-modellen så att eventuella korrigeringar/kompletteringar kan genomföras baserat på återkopplingen utan att modellen måste göras om från början.